

A MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES EQUIVALENTES NO PROJETO HAPRONT (1976)

Adriana Menegotto Nierri ¹

Barbara Winiarski Diesel Novaes ²

INTRODUÇÃO

O estudo³ se refere a Matemática Moderna do ensino de frações equivalentes que estava sendo veiculada no Projeto HAPRONT – Habilitação de Professores não Titulados 1976-1979.

Em convênio com o Governo do Estado do Paraná, o Projeto foi executado pela Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Paraná, através da CETEPAR – Centro de Educação Técnico Profissional do Paraná.

Este é um projeto pensado e desenvolvido para a formação do professor no estado do Paraná, dentro de um ideário do Movimento da Matemática Moderna, com ênfase na Teoria dos Conjuntos, em seus conceitos, nas noções referentes as relações, as operações e as propriedades, e no uso da linguagem simbólica (Costa, 2013). Acreditamos que uma análise desse material, nos possibilitará identificar as propostas para ensinar as frações equivalentes, presentes na formação e capacitação⁴ do professor leigo⁵ que atuava nas escolas de 1^a a 4^a séries do primário do Paraná em tempos da Matemática Moderna.

¹ Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Docente no Colégio Estadual Heitor Cavalcanti de Alencar Furtado Tupãssi, Paraná, Brasil. Avenida Memória, 357, Paraná, Brasil, CEP: 85945-000. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1888-9755>. CV: <http://lattes.cnpq.br/9615517412907432>. E-mail: adriana.menegotto@yahoo.com.br

² Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Toledo, Paraná, Brasil. Rua Cristo Rei, 19, UTFPR, Vila Becker, Toledo, Paraná, Brasil, CEP: 85902-490. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7763-7777>. CV: <http://lattes.cnpq.br/0374183564751938>. E-mail: barbaraw@utfpr.edu.br

³ Este artigo é parte do estudo realizado na dissertação, intitulada “Uma matemática moderna do ensino de frações equivalentes, Paraná (1970-1980)” apresentada no PPGCEMTE (Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas), da Universidade Federal do Paraná (UFPR), no ano de 2024.

⁴ O termo capacitação está na tese de Costa (2013), hoje faz referência a formação continuada.

⁵ Essa era uma forma utilizada para se referir ao professor que atuava nos primeiros anos escolares sem habilitação para o magistério.

A relevância desse estudo se dá em identificar as ações realizadas na formação do professor leigo, através das normas e orientações para o desenvolvimento do sistema educacional de ensino, encontradas no Relatório I do Projeto HAPRONT.

O trabalho tem por objetivo caracterizar a Matemática Moderna do ensino de frações equivalentes foi sistematizada no Projeto HAPRONT, módulo 9.4 “Operando com números fracionários” (Martins, 1976), para a formação de professores dos primeiros anos de escolarização na década de 1970.

Para caracterizar a matemática do ensino das frações equivalentes, nos valem do referencial teórico metodológico de Moraes, Bertini e Valente (2021), que trazem uma nova hipótese teórica de pesquisa que articula a matemática *a* ensinar e a matemática *para* ensinar⁶, à *matemática do ensino*. Nesse contexto, a matemática *para* ensinar, refere-se “[...] à objetivação de um saber matemático” (Bertini; Moraes; Valente, 2017, p. 68), presente na formação profissional do professor que ensinará matemática, já a matemática *a* ensinar refere-se aos “saberes disciplinares” (Bertini; Moraes; Valente, 2017, p. 69), aquela ligada aos saberes objetivados, normatizados, disposta para o ensino.

A *matemática do ensino* interessa-se por questões epistemológicas, analisa como os saberes escolares se constituem através da matemática presente na escola, levando em consideração os aspectos envolvidos na formação de professores e na dimensão do ensino em uma dada época (Moraes; Bertini; Valente, 2021).

Uma forma de caracterizar essa matemática do ensino de frações é através da análise de manuais pedagógicos e de livros didáticos (Moraes; Bertini; Valente, 2021). Para Moraes, Bertini e Valente (2021), tais documentos de diferentes épocas, possibilitam caracterizar as mudanças que ocorreram na matemática do ensino de frações, e são fundamentais para uma análise histórica e epistemológica. Para auxiliar na caracterização da *matemática do ensino* os autores propõem quatro categorias de análise: *sequência*, *significado*, *graduação*, e *exercícios e problemas*.

Essas categorias serão mobilizadas para caracterizar a matemática do ensino das frações equivalentes presente no referido manual.

⁶ categorias de análise discutidas por Bertini, Moraes e Valente (2017), no livro “A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: novos estudos sobre a formação de professores”.

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES LEIGOS NO ESTADO DO PARANÁ, E O PROJETO HAPRONT

Estudos, relatórios e estatísticas realizados durante a década de 1970, apontam para uma grande quantidade de professores não habilitados que estavam em exercício do magistério no ensino primário, principalmente na Zona Rural (Paraná, 1979).

O MEC estabelece através do Plano Setorial de Educação e Cultura, o Projeto de Capacitação de Recursos Humanos para o ensino de 1º Grau. O Estado do Paraná foi selecionado como Unidade Federativa responsável por testar e desenvolver esse Projeto, financiado pelo Salário Educação Quota Federal 1975/1979 e titulado como Projeto HAPRONT, (Paraná, 1979).

O Objetivo Geral que moveu o Projeto HAPRONT foi “Elaborar e experimentar modelo de curso de habilitação à distância, a nível de 2º Grau⁷, para professores não titulados, em exercício de 1ª a 4ª série” (Paraná, 1979, p. 01).

Dentre os objetivos específicos “Habilita a nível de 2º grau 1020 professores não titulados, em exercício de 1ª a 4ª série” (Paraná, 1979, p. 02). Após dois anos, em 1978, o número de professores cursistas era 797, e em 1979 concluíram o curso 721 professores.

O Projeto HAPRONT, destinou-se a professores leigos com formação até a quarta série, o material didático foi produzido no Paraná, por um grupo de 22 professores especialistas em diferentes disciplinas que compunham o currículo, que foram treinados em Tecnologia Instrumental, através de um curso realizado no CETEPAR, sob orientação do Professor Fernando Pizza, mestre nessa área, enviado pelo MEC/DEF – CODEN.

O projeto foi desenvolvido pelo ensino a distância, utilizando material de instrução, módulos, permitindo que cada aluno progredisse de acordo com seu ritmo e tempo de estudo. Mensalmente realizava-se Encontros Pedagógicos entre cursistas e orientadores, para acompanhamento do desempenho, distribuição de módulos. As avaliações consistiam em pré-teste, pós testes, avaliações trimestrais, fichas de observações e estágio supervisionado.

O Projeto era dividido por módulos, a carga horária destinada a disciplina de Matemática, correspondia a 400 horas, distribuídas em 23 módulos, dentro de um total de 5.360 horas e 254 módulos. Os módulos referentes a disciplina de Matemática, ficaram sobre

⁷ Titulação que na atualidade corresponde ao ensino médio

a responsabilidade de elaboração da professora Clelia Tavares Martins⁸, docente que fez parte do Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática – NEDEM⁹. Apenas nos quatro últimos módulos, teve a participação de Rosa Kazuco Miyasaki (Costa, 2013).

O manual pedagógico “Operando com números fracionários” (Martins, 1976), têm como assuntos a serem tratados no curso, conhecimento do conjunto de números fracionários, e as quatro operações, e tem por objetivo, utilizar procedimento variados para demonstração de fatos e propriedades, operar com números fracionários, resolvendo situações-problema e utilizando suas propriedades e técnicas operatórias com precisão.

FRAÇÕES EQUIVALENTES NO MANUAL OPERANDO COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS, PROJETO HAPRONT (MARTINS, 1976)

No manual “Operando com Números fracionário”, o conteúdo “números fracionários”, é apresentado como aquele que foi “[...] criado para representar a divisão de números naturais cujo resultado não é um número natural” (Martins, 1976, p.5). A matemática do ensino das frações equivalentes é tratada a partir da *sequência*, relação de equivalência entre números fracionários, entre números fracionários e número natural, entre número fracionário e número misto, seguindo para a equivalência a partir da simplificação de números fracionários, e das classes de equivalência, até chegar à equivalência entre conjuntos equipotentes e o número de elementos do conjunto. O conceito de frações equivalentes antecede o ensino das operações com números fracionários.

Dentro do conjunto dos temas da aritmética, a *sequência* estabelecida é: números naturais, operações com números fracionários e números racionais.

O ensino de frações equivalentes inicia-se com a definição “Os números fracionários que representam a mesma porção ou fração do todo são chamados equivalentes” (Martins, 1976, p.10), sendo este o *significado* dado as frações equivalentes. Essa definição vem acompanhada da imagem de um quadro de equivalência representando as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,

⁸ Para informações sobre essa *expert* pesquisar em: <https://www.ghemat.com.br/experts>.

⁹ O NEDEM foi um grupo que se constituiu no Paraná, formado por professores, que elaborou uma proposta de Matemática moderna, e tinha como coordenador o professor Osny Antonio Dacol.

e $\frac{1}{8}$, e as relações de equivalência: $\frac{1}{2}$ equivale $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}$ equivale $\frac{4}{8}$, e que $\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{4}{8}$, as relações de equivalência também são feitas para as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$.

A equivalência entre um número fracionário e número natural, tem início a partir de um conjunto de círculos, dois círculos divididos ao meio $\frac{4}{2}$ correspondem a 2 círculos inteiros, acompanhado do uso da linguagem simbólica pertence e não pertence. Apresenta a definição “entre o número fracionário e um número natural, dizemos que há uma relação de equivalência quando o numerador é múltiplo do denominador, ou melhor, é um produto do denominador” (Martins, 1976, p.11).

A relação de equivalência entre número fracionário e número misto se dá através da imagem de sete metades de uma laranja, sendo $\frac{7}{2}$, equivale a $3\frac{1}{2}$, indica que “Cada duas meias laranjas corresponde a uma laranja” (Martins, 1976, p.11).

Para determinar um número misto equivalente ao número fracionário, utiliza-se da regra “[...] divide-se o numerador pelo denominador. O quociente é o número natural; o resto da divisão é a quantidade de unidades fracionárias” (Martins, 1976, p.11), e para achar o número fracionário equivalente ao número misto utiliza do exemplo: “ $3\frac{1}{2}$, como a unidade fracionária é $\frac{1}{2}$, 3 unidades simples transformam-se em $\frac{6}{2}$, com mais $\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ ” (Martins, 1976, p.11). Em seguida do exemplo apresenta a regra, multiplicar o denominador pelo número inteiro e somar com o numerador.

Para a simplificação de números fracionários, o manual HAPRONT separa as frações em redutíveis e irredutíveis. E apresenta que as frações são redutíveis quando podemos simplificar seus termos.

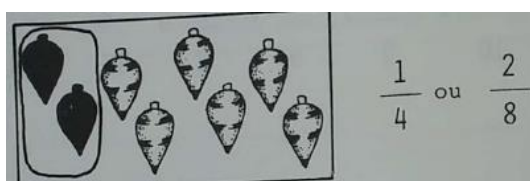
As classes de equivalência são tratadas a partir do quadro de equivalência, com as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$. Essas são formadas através da multiplicação de uma fração irredutível por números naturais, chegando à propriedade do número fracionário, “multiplicando ou dividindo ambos os termos de um número fracionário por um mesmo número natural, diferente de zero (0), obtém-se um número fracionário equivalente” (Martins, 1976, p.14).

Para construção das classes de equivalência, indica utilizar o quadro de equivalência, figuras geométricas circulares, acompanhadas de *exercícios* de simplificação

de frações, construção das classes de equivalência a partir de uma fração dada, e frações equivalentes a partir das figuras geométricas circulares.

Para a compreensão da equivalência entre subconjuntos equipotentes e o número de elementos do conjunto, o manual utiliza conjuntos com imagens de piões, bandeirinhas, ferraduras, flores. Através das imagens é possível, visualmente, estabelecer as equivalências, por exemplo, $\frac{1}{4}$ de oito piões, é equivalente a $\frac{2}{8}$ de oito piões.

Figura 1 – Equivalência entre conjuntos e subconjuntos equipotentes



Fonte: (Martins, 1976, p.16)

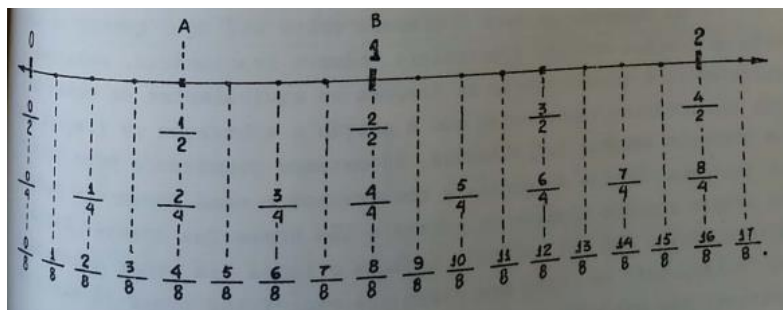
Assim percebemos que o ensino das frações equivalentes segue a *graduação*, por meio das relações de equivalência se formam as classes de equivalência, as relações de equivalência são construídas através de imagens de quadros de frações, círculos divididos em partes congruentes, as classes de equivalência podem ser percebidas através do quadro de equivalências, pela multiplicação de ambos os termos de uma fração por um mesmo número natural, através de círculos divididos em partes congruentes, e em subconjuntos equipotentes.

Após a explanação de cada tópico dentro da *sequência* apresentada para tratar do conteúdo números fracionários, são apresentados *exercícios e problemas*, esses articulam-se com a proposta que foi apresentada para o ensino das frações, o mesmo acontece com relação as frações equivalentes.

Dentre os *exercícios e problemas* relacionados as frações equivalentes, destacamos o uso da reta numerada, para representar os números fracionários, as relações de ordem e equivalência. Também são apresentados *exercícios* com o uso do quadro de equivalência, onde dada uma fração, deve-se representar outra equivalente, mantendo o denominador indicado no exercício.

A representação geométrica do número fracionário aparece também na reta numerada Figura 2.

Figura 2 - Representação geométrica dos números fracionários



Fonte: (Martins, 1976, p.27)

Observando a imagem da reta acima percebemos elementos como a representação do zero na fração $(0) - \frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0}{8}, \dots$, a classe de equivalência do $1 - \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots$, entre outras equivalências.

A autora conclui que “Cada conjunto de frações equivalentes representa um número, o NÚMERO RACIONAL” (Martins, 1976, p. 28), e que, assim como no conjunto dos números naturais, cada número é um ponto na reta, no conjunto dos números racionais “[...] cada conjunto de frações equivalentes é um ponto na reta” (Martins, 1976, p. 28).

Durante a apresentação dos conteúdos, por meio das classes de equivalência são estabelecidas relação de ordem, igualdades e desigualdades, simplificação e redução ao denominador comum, adição e subtração de frações não homogêneas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados nos possibilitam afirmar que a autora do manual pedagógico se apropriou das ideias presentes na Matemática Moderna. Pode-se identificar o uso da linguagem simbólica como: diferenças e igualdade; se e somente se; pertence e não pertence, o uso da palavra “congruentes”; o uso de conjuntos e subconjuntos equipotentes para reconhecer frações equivalentes.

Identificamos uma *sequência* para o ensino das frações equivalentes, destacamos que o manual utiliza da comparação de frações para chegar ao conceito de frações equivalentes. Assim como, as frações equivalentes antecedem o ensino de operações com frações. O *significado* dado às frações equivalentes é apresentado como os números

fracionários que apresentam a mesma porção do todo. A graduação tem início com o quadro de equivalência, desenhos de figuras geométricas (círculos), conjuntos e subconjuntos equipotentes, reta numérica, classes de equivalência, em construção de um conceito abstrato ao uso da regra. As propostas apresentadas para os *exercícios e problemas*, articulam-se com os caminhos que foram trilhados para o ensino, seguindo a mesma *graduação*.

A reta numérica foi considerada um processo visual importante para compreensão das classes de equivalência em que cada conjunto de frações equivalentes representa um mesmo número racional.

Conforme os dados obtidos pelo relatório HAPRONT (1979), acreditamos que o Projeto HAPRONT foi um importante meio para qualificar profissionais que estavam sem titulação, assim como a autora demonstrou um vasto conhecimento sobre a “matemática do ensino”, incorporando saberes de referência para ensinar as frações equivalentes, articulando elementos do “Movimento da Matemática Moderna”.

REFERÊNCIAS

BERTINI, Luciane de Fatima; MORAIS, Rosilda dos Santos; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A matemática a ensinar e a matemática para ensinar**: novos estudos para a formação de professores. 1.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

COSTA, Reginaldo Rodrigues da. **A capacitação e aperfeiçoamento dos professores que ensinavam matemática no Estado do paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna – 1961 a 1982**. 2013. 212f. Tese de Doutorado em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2013.

MARTINS, Clélia Tavares. **Operando com números fracionários**. Projeto HAPRONT, módulo 9.4. Paraná: Coordenação Central Curitiba: MEC/DEF/SEEC/CETEPAR, 1976.

MORAIS, Rosilda dos Santos; BERTINI, Luciane de Fatima; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A Matemática do ensino de frações**: do século XIX à BNCC. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

PARANÁ. **Relatório HAPRONT I** – Paraná Coordenação Central Curitiba: 1976-1979 MEC/DEF/SEEC/CETEPAR, 1979.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para o educador matemático. In: Hofstetter, R., & Valente, W. R. (Org.) **Saberes em (trans) formação**: tema central da formação de professores. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, p. 201-226, 2017.

Palavras-chave: Matemática do Ensino; Frações equivalentes; Projeto HAPRONT.