

FRAÇÕES EQUIVALENTES NA RETA NUMÉRICA: a matemática moderna nos livros do NEDEM

Adriana Menegotto Niérri ¹

Danilene Gullich Donin Berticelli ²

Barbara Winiarski Diesel Novaes ³

RESUMO

O presente trabalho teve por objetivo analisar como as frações equivalentes foram trabalhadas no período do Movimento da Matemática Moderna, considerando o uso da reta numérica no ensino de frações equivalentes e as relações de comparação estabelecidas no caso específico do livro do NEDEM – Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática, para as primeiras séries de escolarização do Estado do Paraná. Para realizar a análise pretendida, buscou-se identificar, no referido livro, elementos como: sequência, significado, graduação, exercícios e problemas para a caracterização de uma matemática do ensino de frações. Os resultados parciais revelam que as autoras apropriaram-se do ideário da Matemática Moderna dando ênfase ao estudo das frações equivalentes no livro didático em questão e associando-o à representação geométrica, reta numérica e às classes de equivalência rumo a compreensão do conjunto dos números racionais.

Palavras-chave: Movimento da Matemática Moderna; NEDEM; Frações equivalentes; Reta numérica.

FRACTIONS ON THE NUMBER LINE: modern mathematics in NEDEM books

ABSTRACT

The present work aimed to analyze how the equivalent fractions were worked in the period of the Movement of Modern Mathematics, considering the use of the numerical line in the teaching of equivalent fractions and the comparison relationships established in the specific case of the book of NEDEM - Center for Studies and Dissemination of Mathematics Teaching, for the first grades of schooling of the State of Paraná. To perform the desired analysis, we sought to identify, in this book, elements such as: sequence, meaning, graduation, exercises and problems for the characterization of a mathematics of the teaching of fractions. The partial results reveal that the authors appropriated the ideary of Modern Mathematics, emphasizing the study of equivalent fractions in the textbook in question and associating it with geometric representation, numerical line and equivalence classes towards understanding the set of rational numbers.

Keywords: Modern Mathematics Movement; NEDEM; Equivalent fractions; Number line.

¹ Graduada em Matemática pela (UNIPAR). Graduada em Pedagogia pela (UNOPAR). Professora no Colégio Estadual Heitor Cavalcanti de Alencar Furtado Tupãssi, Paraná, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1888-9755> E-mail: adriana.menegotto@yahoo.com.br.

² Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). Docente na Universidade Federal do Paraná, setor Palotina, Palotina, Paraná, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3051-4750>. E-mail: danilene@ufpr.br.

³ Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Toledo, Paraná, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7763-7777> E-mail: barbaraw@utfpr.edu.br.

FRACCIONES EQUIVALENTES EN LA RECTA NUMÉRICA: matemáticas modernas en los libros NEDEM

RESUMEN

El presente trabajo tuvo como objetivo analizar cómo se trabajaron las fracciones equivalentes en el período del Movimiento de las Matemáticas Modernas, considerando el uso de la línea numérica en la enseñanza de fracciones equivalentes y las relaciones de comparación establecidas en el caso específico del libro de NEDEM - Centro de Estudios y Difusión de la Enseñanza de las Matemáticas, para los primeros grados de escolaridad del Estado de Paraná. Para realizar el análisis deseado, se buscó identificar, en este libro, elementos como: secuencia, significado, graduación, ejercicios y problemas para la caracterización de una matemática de la enseñanza de fracciones. Los resultados parciales revelan que los autores se apropiaron de la idea de las Matemáticas Modernas, enfatizando el estudio de fracciones equivalentes en el libro de texto en cuestión y asociándolo con la representación geométrica, la línea numérica y las clases de equivalencia hacia la comprensión del conjunto de números racionales.

Palabras clave: Movimiento Matemático Moderno; NEDEM; Fracciones equivalentes; Línea numérica.

INTRODUÇÃO

A década de 1960 trouxe muitas mudanças aos processos de ensino desenvolvidos nas escolas brasileiras, “dinamizado por questões internas, expansão do atendimento e melhoria da qualidade da escola primária e externas, com a modernização do ensino, o Brasil inicia uma mudança no sistema escolar” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 39). A Lei nº 5.692 de 11 de agosto de 1971 prevê a obrigatoriedade e gratuidade do ensino fundamental de 8 anos. Concomitante a essas mudanças com interferência de movimentos internacionais, consolidava-se no Brasil a Matemática Moderna “[...] levada a conhecer, de modo pioneiro, pelo Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), em 1962 no IV Congresso Nacional de Ensino da Matemática” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 39). O GEEM Grupo paulista que liderou esse movimento, foi coordenado por Oswaldo Sangiorgi⁴.

Dentre as inovações que Movimento da Matemática Moderna (MMM) trouxe para o ensino estavam a realização de congressos, simpósios, cursos para professores, escrita de livros texto adequados a uma nova organização dos conteúdos modernos em que se destaca a teoria dos conjuntos e a organização da matemática em três estruturas mãe: algébricas, topológicas e de ordem. No Paraná esse movimento foi liderado pelo NEDEM – Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática, que teve como coordenador o professor Osny Antônio Dacol – diretor do Colégio Estadual do Paraná (PINTO; NOVAES, 2019).

O grupo “elaborou sua proposta de Matemática Moderna que, posteriormente, foi publicada em duas coleções de livros didáticos (uma para o ginásio e outra para as primeiras séries de escolarização) que passaram a ser adotadas pelas escolas paranaenses durante mais de duas décadas” (PINTO; FERREIRA, 2006, p. 113). O NEDEM voltado para séries iniciais era composto inicialmente por: “Clélia Tavares Martins, Esther Holzmann, Gliquéria Yarentchuk e Henrieta Diminski Arruda; participantes do quadro docente do Colégio Estadual do Paraná e de outros Colégios de Curitiba” (PINTO; FERREIRA, 2006, p. 116).

⁴ Oswaldo Sangiorgi nascido em São Paulo no ano de 1921, foi professor de matemática, autor de diversos livros didáticos na época do Movimento da Matemática Moderna, presidente do GEEM. De acordo com Silva (2007) foi um sujeito ativo, devido sua liderança, levou o M.M.M. e o GEEM seguirem passos largos na Educação Matemática.

O trabalho inicial⁵ objetivou caracterizar a matemática do ensino de frações a partir da análise do livro *Ensino Moderno da Matemática*, elaborado pelo Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM), para a quarta série do primeiro grau, no ano de 1975.

A OBRA “O ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA”

A coleção “Ensino Moderno de Matemática”, organizada em quatro volumes e destinada as primeiras séries de escolarização, foi organizada pelo NEDEM. De acordo com Pinto e Ferreira (2006) os livros eram bem ilustrados, continham muitos exercícios para os alunos, e a proposta como princípio era a interdisciplinaridade. “Segundo a professora Henrieta Arruda, integrante pioneira do NEDEM, a introdução da proposta moderna ocorreu gradualmente” (PINTO; FERREIRA, 2006, p. 119).

A coleção citada teve como coordenador geral Osny Antônio Dacol, e as autoras: Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Glikéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda, Nelly Humphreys, sendo “a professora Henrieta Arruda, principal autora da coleção” (PINTO; FERREIRA, 2006, p.120).

Para este estudo realizou-se uma análise no livro didático “Ensino Moderno de Matemática” produzido pelo NEDEM, 1º grau, volume IV, que data sua edição de 1975 (figura 1).

Figura 1 – “Ensino Moderno da Matemática para o 4ª, 1º grau”.



Fonte: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975, capa).

⁵ Este artigo é resultado do trabalho de conclusão da disciplina de História da educação matemática do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas (PPGECMTE) da Universidade Federal do Paraná, setor Palotina.

A coleção “Ensino Moderno de Matemática” destinada ao curso primário, organizada pelo NEDEM teve como coordenador geral Osny Antônio Dacol nascido em 1930, formado em matemática pela Universidade Federal do Paraná. Foi diretor do Colégio Estadual do Paraná, coordenou e foi um dos fundadores do NEDEM. De acordo com Pinto e Ferreira (2006), Osny Antônio Dacol foi o principal representante do Movimento da Matemática Moderna no Paraná.

Pelo comprometimento e profissionalismo demonstrados pelo seu coordenador, ao conseguir mobilizar e fazer circular entre os professores novos saberes matemáticos, é possível afirmar que Osny Antonio Dacol, falecido em 18 de fevereiro de 2006 foi um *expert* do Movimento da Matemática Moderna no Paraná (PINTO; NOVAES, 2019, p. 328).

Três autoras foram responsáveis pela produção do quarto volume sendo elas: Clélia Tavares Martins, atuou como técnica no CEPE – Conselho de Ensino Pesquisa e Extensão, na década de 1960, e na década de 1970 foi técnica da CELEPAR – Centro de Treinamento e Aperfeiçoamento de Professores do Estado do Paraná. No início da década de 1960 também integrou o NEDEM juntamente com um grupo de professores produziu materiais didáticos para o ensino de matemática na educação primária. Com a reforma do ensino de 1º e 2º grau na década 1970, foi responsável pela elaboração do material utilizado para a formação de professores leigos do programa HAPRONT – Habilitação do Professor Não Titulado. Em finais dos anos 1970 e inícios dos anos 1980 Clélia Tavares Martins contribuiu também com a produção de materiais para as escolas rurais do Paraná.

Clélia se fez presente no cenário educacional paranaense e, especificamente, em relação ao ensino da matemática foi uma referência no contexto estadual, seja nos materiais destinados aos alunos, nas orientações oficiais para a organização do ensino ou na formação de professores que atuaram nos anos iniciais de escolarização (COSTA, 2020, p. 209).

De acordo com Costa (2020), sua atuação como produtora de livros didáticos nas décadas de 1970/1980 permite considerá-la como uma *expert*⁶ no ensino de matemática.

⁶ O grupo Ghemat Brasil entende por *experts*, personagens que compõem um grupo que tem por tarefa sistematizar saberes para o ensino e para a formação de professores, divulgados em documentos de caráter oficial. Em meio às necessidades governamentais, são convocados para resolverem um problema prático: elaborar novos documentos curriculares, novos materiais para o ensino e formação de professores. Posteriormente, essa produção ganha chancela de ministérios da educação, secretarias estaduais ou municipais, entre outros órgãos públicos. Disponível em: <https://www.ghemat.com.br/experts>. Acessado em: 27 de março de 2022.

Gliquéria Yaremtchuk, fez licenciatura em Pedagogia pela Universidade Federal do Paraná, foi professora da Secretaria de Educação do Paraná efetivada em 1961, “ministrou a disciplina de Teoria e Prática de Matemática na formação de Normalistas do Instituto de Educação do Paraná” (PORTELA, 2018, p. 6). Em 1967 compôs a equipe que elaborou as Diretrizes Curriculares da Secretaria de Estado da Educação do Paraná, disciplina de Matemática ensino de 1º grau. De acordo com Portella (2018), Gliquéria Yaremtchuck, diante do seu trabalho realizado com o grupo de professoras e coordenador que produziram a coleção “Ensino Moderno de Matemática”, “[...] demonstrou capacidade de ir além de adequar-se às propostas inovadoras, adequou espaços e criou instrumentos demonstrando *expertise* profissional” (p. 11).

Henrieta Dyminski Arruda nasceu em 1936 em Curitiba, cursou a Escola Normal no Instituto de Educação do Paraná, concluindo em 1954. Licenciada em Pedagogia pela Universidade Federal do Paraná, atuou como professora de 1º ano em escola pública no Paraná, produziu juntamente com outros professores, a coleção de livros “Ensino Moderno da Matemática”, composto por quatro volumes e destinados ao ensino primário. “Ao participar na elaboração de materiais didáticos que circulam no estado do Paraná, conforme fontes apresentadas, Henrieta configura-se como uma *expert*, destacando-se como uma peça fundamental na educação primária paranaense” (BERTICELLI; PORTELLA, 2021, s.p.). Participou da elaboração de documentos para o ensino e formação de professores vinculada a CELEPAR – Centro de Treinamento e Aperfeiçoamento de Professores do Estado do Paraná atuou como assessora pedagógica no Instituto de Educação do Paraná na década de 1970, e foi Coordenadora do Ensino de Matemática na Rede Municipal de Ensino de Curitiba.

Podemos verificar que as três autoras do livro se configuram como Experts. Mas porque essa informação é relevante? No início do século XX, iniciou-se o movimento da constituição de experts, o “Congresso Internacional de Matemáticos” (ICM) destinava sessões a um grupo de educadores matemáticos, com o objetivo de debater questões do ensino da matemática. A partir de 1954, passou a se chamar de ICMI “Comissão Internacional de Ensino de Matemática”, tinha como função também criar programas destinados a promover e desenvolver a educação matemática em todos os níveis. De acordo

com Bertini, Moraes e Valente (2017) “as atribuições da ICMI reforçam a ideia de um movimento crescente de expertise responsável pela objetivação e institucionalização do campo educação matemática no século XX” (p. 24). Ao serem responsáveis pela criação de programas, buscam por novas expertises, sendo está uma ação para especialistas, o comitê (ICMI) decide quais são os convidados experts para compor (ICME), “serão esses os responsáveis dali em diante pela produção e sistematização de saberes no campo pedagógico” (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 25). Uma vez institucionalizados os saberes, criam-se as disciplinas escolares, e a produção de materiais para atender os saberes que serão trabalhados na escola. Dizer que Martins, Yaremtchuk e Arruda são experts, é reconhecer suas produções além dos materiais didáticos, mais como sistematizadoras e produtoras de saberes.

O MMM PARANAENSE E A PARTICIPAÇÃO DO NEDEM

A modernização do ensino da matemática no Brasil repercutiu a partir de 1960, fruto de um movimento internacional, propagado por grupos de pesquisas de diferentes estados brasileiros. No Paraná, o NEDEM foi o principal meio de divulgação do MMM, sendo que as atividades do Grupo eram sediadas no Colégio Estadual do Paraná, tendo como coordenador Osny Antônio Dacol. De acordo com Pinto e Ferreira (2006), a trajetória do NEDEM consta registrada nos arquivos do Colégio Estadual do Paraná e esses arquivos permitem analisar as normas e práticas das ideias do Movimento da Matemática Moderna no estado supracitado. Osny Antônio Dacol “em 1961, participou em São Paulo do curso de aperfeiçoamento para professores de Matemática, coordenado pelo Professor Oswaldo Sangiorgi, o maior divulgador da matemática moderna no Brasil” (PINTO; FERREIRA, 2006, p. 115).

De acordo com Pinto e Novaes (2019), dentre os documentos consta que em 1964 se fez uso de uma apostila destinado a alunos do ginásio do Colégio Estadual do Paraná de lógica matemática elaborada pelo NEDEM. Outro marco importante foi a convocação para professores assistirem a palestra “Novos Métodos do Ensino da Matemática”, proferida pela professora Stannard Alen, vinda de Surrey Inglaterra em 1964 (PINTO; FERREIRA, 2006). Ainda há registros de aquisição de vários livros que pudessem aprofundar os estudos sobre

a Matemática Moderna, além da presença de 25 professores paranaense no V Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática, em 1966, conforme registro nos Anais.

O NEDEM produziu uma coleção de quatro volumes, destinadas ao ensino ginásial, intitulada “Ensino Moderno da Matemática”. “O título intencional da coleção era para ressaltar que era o ensino, e não a matemática, que era moderna” (PINTO; NOVAES, 2019, p. 325). Na década de 1970 integrantes do NEDEM apresentam uma série composta por quatro livros destinados ao ensino primário, uma importante iniciativa que marcou no Paraná a disseminação do ensino da Matemática Moderna.

Diferentemente da maioria dos livros de Matemática Moderna publicados na época, os produzidos pelo grupo paranaense NEDEM contêm os nomes dos professores que participavam da produção de cada livro, em todas as fases, desde o estudo da nova proposta até a edição dos livros, o que demonstra a integração e o espírito coletivo do grupo (PINTO; NOVAES, 2019, p. 327).

Percebemos que ao identificarem os autores de cada livro, houve uma valorização do profissional que se dedicou nos estudos e pesquisas para a produção do material, e na reestruturação do ensino da matemática num ensino moderno da matemática.

FINALIDADES DO CURRÍCULO PARANAENSE NO INÍCIO DE 70

A Lei nº 5.692 de 11 de agosto de 1971 previa que o ensino de 1º grau destina-se a formação da criança e de pré-adolescente, variando o conteúdo, o método de acordo com as fases de desenvolvimento dos alunos. O ensino de 1º grau seria de 8 anos, totalizando pelo menos 720 horas de formação. Para o ingresso no ensino o aluno deveria ter no mínimo sete anos de idade.

A secretaria de Educação e Cultura do Estado do Paraná apresentou em 1973 apresentou uma primeira sugestão de diretrizes curriculares para o ensino de 1º grau, com o objetivo de definir as matérias, visando orientar o trabalho do professor e da escola. Nesta versão apresenta os objetivos específicos das atividades para 1ª à 4ª série, e os objetivos por área de 5ª a 8ª série.

Dentre as orientações que consta no currículo (PARANÁ, 1973), “A formação do espírito científico, o aprender a fazer ciências e a dominar as técnicas converte-se numa necessidade

educacional” (p.55). Defende a ideia que por mais simples que seja uma atividade a ser desenvolvida, mesmo que seja de forma braçal, esta atividade exige o desenvolvimento da capacidade de pensar. Essa capacidade de pensar, e a organização de ideias comuns são condições necessárias para que o homem desenvolva suas funções na produção de bens e serviço. “O ensino de matemática tem por função desenvolver o espírito de investigação, invenção e iniciativa, o pensamento lógico e a noção de universalidade das leis matemáticas” (PARANÁ, 1973, p. 55).

Paraná (1973) “a formação do espírito científico, o aprender a fazer ciências e a dominar as técnicas converteu-se numa necessidade educacional” (p.55). Com a evolução da ciência e da tecnologia na sociedade atual, fica perceptível a necessidade de desenvolver a capacidade de pensar, mesmo que para realizar atividades simples com o uso das mãos.

De acordo com Paraná (1973), a capacidade de pensar e o domínio de ideias básicas comuns são condições para que o homem se integre no sistema social, e são condições para as diversas funções do homem no mundo.

“O estudo da matemática tem por função desenvolver o espírito de investigação, invenção e iniciativa, o pensamento lógico e a noção de universalidade das leis matemáticas” (PARANÁ, 1973, p. 55). Para que o ensino da matemática atinja seus objetivos, esse deve ser executado visando a formação do indivíduo.

As principais características do Movimento da Matemática Moderna encontradas no currículo Paraná (1973), apontam para que o educando seja capaz de raciocinar logicamente, trabalhar com metodologia científica. Esse deverá adquirir informações e conhecimentos sobre terminologia, simbologia e conceitos, podendo assim desenvolver através da intuição e dedução, a lógica, a teoria dos conjuntos, as generalizações em matemática e a geometria.

ENSINO MODERNO DE MATEMÁTICA E AS FRAÇÕES EQUIVALENTES

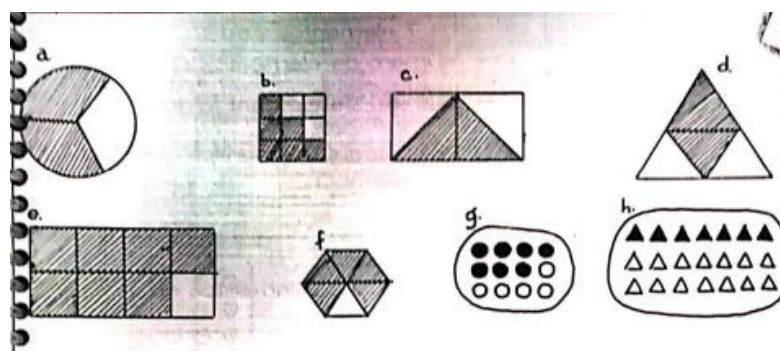
O Livro didático “Ensino Moderno de Matemática” de Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975) volume IV, apresenta o rol de conteúdos a serem tratados na 4ª série, sendo que a terminologia “fração” é apresentada no índice. O conteúdo de frações é iniciado por meio de figuras geométricas planas divididas em partes congruentes, e por conjuntos que contém figuras, (bolinhas, triângulos). Logo abaixo há uma tabela para ser preenchida com os dados:

partes pintadas, partes congruentes, fração e a escrita de como se lê a fração. Na sequência há uma explicação com a imagem de uma fração indicando, que “o numerador representa o número partes pintadas,” e “o denominador as partes congruentes da figura” (MARTINS; YAREMTCHUK; ARRUDA, 1975, p. 133).

Ao iniciar as atividades propostas sobre as frações não se faz menção a essa terminologia e, não consta orientações sobre o assunto a ser tratado, o que leva a conjecturar que o *significado* não é trabalhado inicialmente. Por significado, Morais; Bertini e Valente (2021) entendem “o modo como o professor deverá se referir a um dado tema do ensino, de maneira a introduzi-lo em suas aulas, tendo em vista o inicial contato do aluno com um novo assunto” (p. 18-19).

Percebe-se que o conceito parte-todo é uma das principais abordagens do livro. Para tratar desse conceito são apresentadas figuras geométricas divididas em partes equivalentes. Nessa perspectiva de partição, “as frações surgem da partição ou divisão de áreas geométricas em partes iguais, no destaque de algumas partes e sua nomeação” (POWELL, 2019, p. 59-60).

Figura 2 – figuras geométricas planas divididas em partes congruentes, e conjuntos que contém figuras.



Fonte: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975, p. 133).

O livro apresenta uma variedade de atividades com imagens de figuras dentro de um conjunto. “A teoria dos conjuntos era o pilar do modernismo e a noção de estrutura possibilitava uma abordagem que interessava à Matemática Moderna,” (WROBEL; KILL, 2021, p.6). O que nos aponta indícios que o livro foi produzido, pensado, para atender a vaga pedagógica vigente.

Logo na segunda página do conteúdo de frações, o livro apresenta um exemplo com conjunto figura 3, e a relação de equivalência aparece através de subconjuntos equipotentes

“achar a fração de um conjunto, é semelhante ao trabalho com subconjuntos equipotentes”
 (MARTINS; YAREMTCHUK; ARRUDA, 1975, p. 13).

Figura 3 – Subconjunto equipotente



Fonte: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975, p. 133).

Em seguida traz exercícios para aplicação do conceito, sem fazer menção ao termo equivalência.

A comparação de frações se dá pela representação do número fracionário com denominadores iguais na reta numérica. Após apresentar algumas retas com diferentes denominadores, propõem atividades para completar utilizando os sinais de: igualdade, maior e menor.

Ao trabalharem com números racionais, Martins; Yaremtchuk; Arruda, (1975) compreendem que cada conjunto de frações equivalentes representa um ponto na reta, assim como no conjunto dos números naturais, cada número representa um ponto na reta.

Figura 4 – Representação do número fracionário na reta numérica

Quantos quintos está indicando
 - a sagital menor? _____
 - a sagital maior? _____

Que numerais correspondem aos NÚMEROS NATURAIS, na reta acima? _____

Quantos terços está indicando:
 - a sagital menor? _____
 - a sagital maior? _____

Que numerais correspondem aos NÚMEROS NATURAIS na reta acima? _____

Que numerais representam frações menores do que uma unidade simples:
 na 1a. reta numerada? _____
 na 2a. reta numerada? _____

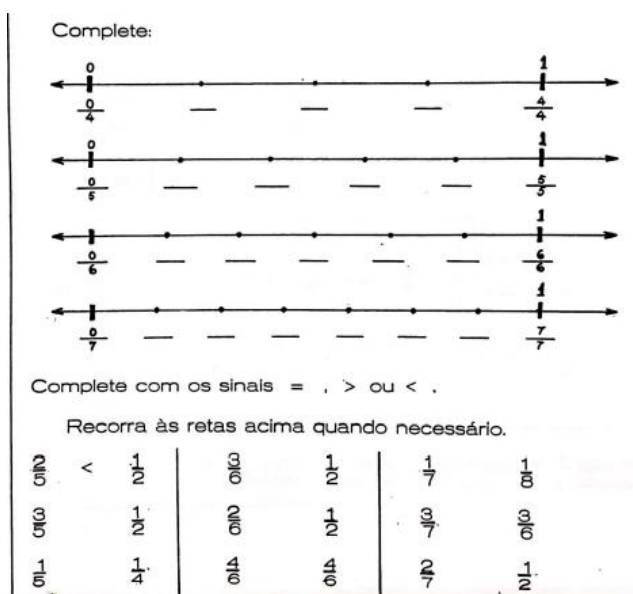
Dê 8 exemplos de numerais que representam frações maiores do que uma unidade simples.

Fonte: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975, p. 138).

Na representação de números fracionários na reta numérica, no livro do aluno volume IV, em ordem crescente, o exercício pede para indicar a menor e a maior fração que a sagital está indicando. Ele apresenta espaços para completar com os números fracionários que não estão sendo indicados e, o enunciado não orienta o aluno sobre o que é preciso ser feito. Observando a reta com os números indicados e após ser preenchida é possível estabelecer relações de ordem, equivalência $1 = \frac{3}{3}$, $2 = \frac{6}{3}$, $3 = \frac{9}{3}$, $4 = \frac{12}{3}$, e desigualdade $\frac{7}{3} > \frac{2}{3}$, $\frac{5}{3} < \frac{12}{3}$.

A utilização da reta numerada favorece a comparação entre duas frações de denominadores diferentes, a partir da medição é possível fazer uma relação de grandezas. Na perspectiva de medição de Powell (2019), um número fracionário representa uma relação matemática, em que “A relação é da proporção ou comparação multiplicativa entre duas quantidades da mesma espécie que têm uma quantidade de comensurabilidade” (p. 60). Da forma que as retas estão apresentadas (figura 3), frações com denominadores (4, 5, 6, 7), pode-se concluir, por exemplo, que $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ que $\frac{3}{6}$ equivale a $\frac{2}{4}$.

Figura 5 – Reta numerada e a comparação de frações

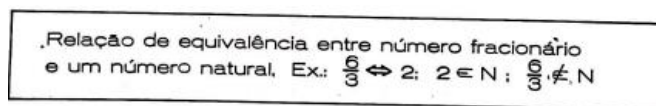


Fonte: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975, p. 139).

O livro apresenta imagens que dão ideia do quadro de equivalência, possibilitando visualmente estabelecer relações de comparação entre as frações.

Ao tratar de frações equivalentes, fazendo menção à nomenclatura equivalência, as autoras estabelecem uma relação entre o número natural e o número fracionário, como podemos ver no exemplo abaixo com notação do MMM.

Figura 6 – relação de equivalência.



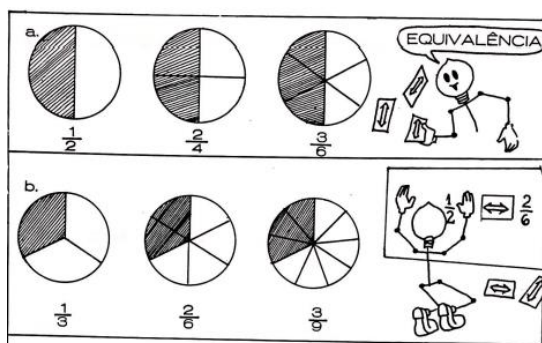
Fonte: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975, p. 142).

A escrita leva ao questionamento se 2 é equivalente a $\frac{6}{3}$, $\frac{6}{3}$ não pertence ao conjunto dos números naturais? “[...] todo número natural pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ ” (SANCHES, LIBERMAN, 1975, p.28 apud MORAIS; BERTINI; VALENTE 2021, p. 52).

O que chama a atenção também nessa figura 6 é a simbologia de equivalência, pertence e não pertence, na quarta série já se tinha uma maior aproximação com a notação matemática formal. Mas essa era uma característica marcante da Matemática Moderna.

O livro apresenta alguns exercícios, de forma gradativa, de acordo com a *sequência* que o conteúdo de frações equivalentes foram apresentados. De forma criativa apresenta um quadro com discos de frações, sendo possível estabelecer relação de equivalência (figura 7).

Figura 7 – Disco de frações



Fonte: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975, p. 144).

Na *sequência* traz a relação de equivalência pela propriedade, “multiplicando os termos de um número fracionário pelo mesmo número natural, diferente de zero, obtém-se um número fracionário equivalente ao número dado” (MARTINS; YAREMTCHUK; ARRUDA, 1975, p. 144). Nessa *sequência* indicada no livro didático em questão, para a

matemática do ensino de frações, “os conceitos são explorados de diferentes formas, numa progressão às operações mais sistematizadas e abstratas” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p.54). Por *sequência* Moraes, Bertini e Valente (2021) entendem “o lugar ocupado pelas frações no conjunto dos temas da aritmética” (p. 18). Para eles essa *sequência* tem caráter histórico, aparece de acordo com a vaga pedagógica vigente.

Figura 8 – Comparando frações com figuras geométricas, reta numerada, conjunto de equivalências



Fonte: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975, p. 146).

Olhando para a figura 8 que, a fração equivalente é apresentada pelas autoras em várias representações, numa progressão rumo a forma mais abstrata. O primeiro apresenta figuras geométricas na representação $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, possibilitando visualmente estabelecer a relação de desigualdade. Na reta numerada traz seis divisões proporcionais entre zero e um, para serem completados por frações equivalentes as indicadas, ou com a fração que corresponde a medida indicada na reta. No terceiro exercício apresenta conjuntos de frações equivalentes, indicando que as frações equivalentes a fração inicial dada, foram concebidas a partir da multiplicação do numerador e denominador por um mesmo valor numérico. Posteriormente solicita trocar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$ por equivalentes homogêneas. Percebe-se que da forma

como este último exercício foi apresentado não propicia clareza quanto à resolução, o termo homogênea foi utilizado sem a preocupação de explicar o significado de frações homogêneas.

O livro propõe que as operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes sejam resolvidas pela equivalência de frações. “Efetue as adições, consultando as classes de equivalências (página anterior)”, e em seguida “efetue as subtrações” (MARTINS; YAREMTCHUK; ARRUDA, 1975, p. 143).

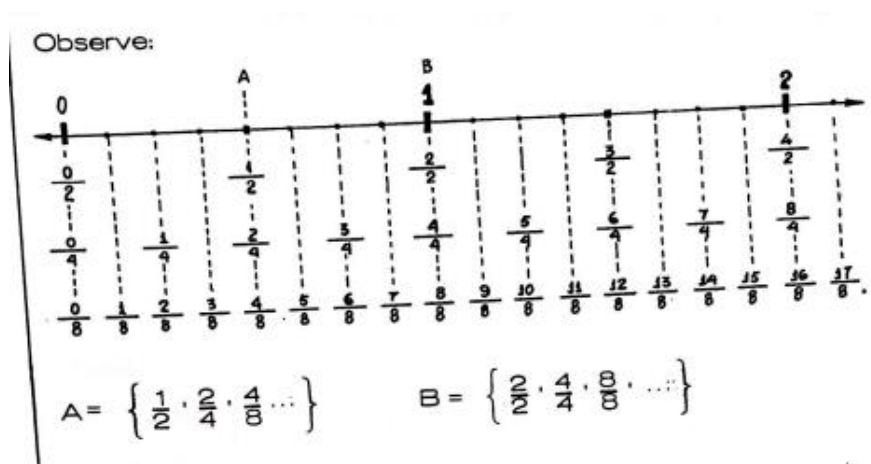
Como exemplo: para efetuar a adição $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ consultava-se as classes de equivalências construídas anteriormente, nesse caso as classes de equivalência seriam: $\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \dots \right\}$; $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots \right\}$ operando assim $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$ (MARTINS; YAREMTCHUK; ARRUDA, 1975).

As classes de equivalência de número fracionário, é um conceito que passou a ser explorado a partir do Movimento da Matemática Moderna. “[...] resultou das discussões e propostas apresentadas no IV Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática e foi também percebida por Gomes (2006) em publicações analisadas do século XX” (WROBEL; KILL, 2021, p. 8).

O livro traz exercícios com operações de adição e subtração de frações, contendo frações próprias, e números mistos. Também apresenta um total de sete situações problemas tratando de temas como: (chocolate, folha de cartolina, canteiro de cenoura). Da forma como o conteúdo está exposto no livro, percebemos que há uma “*graduação*”, trabalhando exercícios dentro de um contexto que é de conhecimento do aluno. Por *graduação* entende-se “uma dada concepção do ensino e aprendizagem de um dado assunto pelo aluno” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 19). O ensino de frações equivalentes segue uma *graduação*, progredindo numa construção da compreensão, através de figuras geométricas, reta numérica, quadro de equivalência e classes de equivalências, até chegar ao uso da propriedade.

Finaliza o conteúdo de frações apresentando a imagem da reta numérica com várias relações de equivalências e definições.

Figura 9 – Frações equivalentes e a reta numérica



Fonte: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975, p.154).

Dentre as definições destaca-se, “cada conjunto de frações equivalentes representa um número, o número racional” (MARTINS; YAREMTCHUK; ARRUDA, 1975, p. 154).

Enfim, percorrendo a construção que o conteúdo de frações equivalentes é apresentado no livro, podemos destacar que o mesmo se inicia logo na segunda página, sem fazer menção ao termo “frações equivalentes”, elas são apresentadas pela comparação de frações com subconjuntos equipotentes, realiza a comparação de frações através da reta numérica, relaciona a equivalência entre números fracionários e números naturais, apresenta o quadro de equivalência, classes de equivalência, disco de frações, até chegar a propriedade. Percebe-se que o livro apresenta uma sequência para o ensino de frações equivalentes, que conduz de forma concreta para o abstrato, trazendo significado a construção dessas, seguindo uma *graduação*.

Após o ensino de frações, o livro traz o conteúdo de números decimais. Para construir o conceito de números decimais, utiliza-se das frações decimais. Podendo deduzir que o ensino de frações está em função da construção dos números decimais.

CONCLUINDO...

O presente artigo teve como objetivo investigar como se deu o ensino de frações equivalentes no período do Movimento da Matemática Moderna, tendo em vista como

historicamente as frações equivalentes foram tratadas nas séries iniciais. Para tal realizou-se uma análise no livro didático “Ensino Moderno de Matemática” produzido pelo NEDEM, 1º grau, volume IV, que data sua edição de 1975. Ao realizar os estudos, levou-se em conta que a década de 1960 trouxe muitas mudanças ao ensino escolar brasileiro, dentre elas a obrigatoriedade e gratuidade do ensino fundamental de 8 anos, bem como o Movimento da matemática Moderna. No Paraná esse movimento foi liderado pelo NEDEM, mesmo grupo responsável pela organização do livro utilizado como fonte para este estudo.

Produzido para atender a proposta do ensino Moderno da Matemática, o livro quanto às frações equivalentes, utilizou-se da *sequência*, explorando o conceito parte-todo, medição, por meio de diversificados exercícios envolvendo figuras geométricas, conjuntos com figuras, retas numéricas, quadro de equivalência e, classes de equivalência. O ensino de frações precede o ensino de números decimais, sendo que o tema frações equivalentes é bem explorado através de uma gama de exercícios, já os problemas estão presentes de forma sucinta, trazendo no contexto objetos de conhecimento do aluno, como: chocolate, folha de cartolina, canteiro de cenoura, percebendo-se uma *graduação*.

Observamos que o livro não faz menção ao uso de materiais concretos (mas não podemos afirmar que isso não ocorria nas classes), e a abordagem visual está presente nas figuras planas divididas em partes equivalentes, onde será representada por um número fracionário indicando as partes do todo que está colorida. Nas operações de adição e subtração de frações com denominadores iguais, apresenta exercícios para pintar a parte correspondente as duas frações dadas no caso da adição, e para subtração retirar da parte a ser pintada da fração subtraída. As abordagens lúdicas também ficam a cargo das retas numeradas, do quadro de equivalência, das figuras geométricas planas que representam relações equivalentes.

Podemos perceber que o livro apresenta através dos *exercícios e problemas*, com o trabalho das frações equivalentes, a construção do conceito de número decimal. Seguindo uma *graduação* das operações concretas, numa progressão para as operações mais sistematizadas. Assim o *significado* dado a uma fração, é o de um número racional.

Percebe-se que o livro referente ao capítulo que traz o estudo de frações, foi um importante material, rico em detalhes, utilizou-se de uma linguagem de fácil compreensão, com sequência de exercícios e, imagens que facilitam a compreensão, produzido para um

ensino moderno da matemática demonstrando-se um importante material que auxilia no ensino de frações equivalentes.

Em síntese, os resultados parciais revelam que as autoras do livro didático apropriaram-se do ideário da Matemática Moderna dando ênfase do estudo das frações equivalentes no livro didático em questão e associando seu estudo à representação geométrica, reta numérica e as classes de equivalência rumo a compreensão do conjunto dos números racionais.

REFERÊNCIAS

BERTICELLI, D. G. D; PORTELA, M.S. **Dicionário dos experts: matemática para o ensino e formação de professores.** 1. Ed. São Paulo: 2021. Disponível em: <<https://www.ghemat.com.br/itens/henrieta-dyminski-arruda>>. Acesso em: 27 mai. 2022.

BERTINI, L. F; MORAIS, R.S; VALENTE, W. R. **A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: novos estudos sobre a formação de professores.** – São Paulo: Livraria da Física, 2017.

BRASIL. **Lei de diretrizes e bases da educação.** Lei nº 5.692 de 11 de agosto de 1971. Disponível em <<https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html>>. Acesso em: 27 mai. 2022.

COSTA, R. R. da. Clélia Tavares Martins e sua influência na formação de professores e no ensino de matemática no Paraná: 1960 - 1980. **REMATEC**, v. 15, n. 34, p. 195-211, 1 set. 2020. Disponível em: <<http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/270>>. Acesso em: 27 mai. 2022.

MARTINS, C.T; YAREMTCHUCK, G; ARRUDA, H.D. **Ensino moderno da matemática.** NEDEM. Volume IV. São Paulo: Editora do Brasil, 1975.

MORAIS, R. S; BERTINI, L.F; VALENTE, W.R. **A Matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC.** – 1. Ed. - São Paulo: Livraria da Física, 2021.

PARANÁ. **Revista Currículo** (Currículo do Estado do Paraná). 1973. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219626>>. Acesso em: 27 mai. 2022.

PINTO, N. B; FERREIRA, A. C. C. O movimento da matemática moderna: o papel do NEDEM. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n.18, p.113-122, maio./ago. 2006. Disponível em: < <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160490>>. Acesso em: 27 mai. 2022.

PINTO, N. B; NOVAES, B. W. D. “Não é Difícil Ensinar Matemática”: o protagonismo do NEDEM na difusão da matemática moderna no Paraná. **Acta Scientiae**, Canoas, Vol. 21, N.



Especial, p.109-122, Maio/Jun. 2019. Disponível em: <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/>>. Acesso em: 27 mai. 2022.

PORTELA, M. S. A expertise de professores paranaenses e os saberes que geram a produção de materiais didáticos para o ensino de matemática. ENAPHEM - Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática. **Anais...** - ISSN 2596-3228, (4), 2018. Recuperado de <<https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/6510>>. Acesso em: 27 mai. 2022.

POWELL, A. B. Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v.9, n.2, 2019, p. 50-68, 2019. Recuperado de <<https://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/ripem/article/view/2152>>. Acesso em: 27 mai. 2022.

WROBEL, J. S; KILL, T. G. Classes de Equivalência: uma abordagem moderna para o ensino de frações. **Revista de História da Educação Matemática**, nº 7, 1-27, 2021. Recuperado de <<https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/405>>. Acesso em: 27 mai. 2022.

SILVA; V. **Oswaldo Sangiorgi e “o fracasso da matemática moderna” no Brasil**. São Paulo, 2007. Disponível em: <<http://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11130>>. Acesso em 02 de jun. 2022.