

PROPORÇÕES: uma matemática para ensinar matemáticas

Maria Beatriz Pereira Lima¹

Viviane Barros Maciel²

RESUMO

Este texto trata-se de uma pesquisa de Iniciação Científica em desenvolvimento, vinculada ao projeto Matemáticas para Ensinar nos primeiros anos escolares, da Universidade Federal de Jataí (Brasil) e tem como objetivo apresentar resultados parciais da pesquisa sobre o tema proporções em manuais pedagógicos do final do século XIX e início do século XX e analisar em que perspectivas o tema tem sido abordado no contexto atual e nos documentos orientadores curriculares brasileiros. Assim, a pesquisa é bibliográfica e documental. Como resultado, verificou-se que o tema proporções nos primeiros anos escolares era, e ainda é focado como um tema integrador e articulador de ideias matemáticas, contribuindo, dessa forma, para a sistematização de operações e para a resolução de problemas de utilidade, reivindicando do professor que ensina matemática múltiplos saberes.

Palavras-chave: Proporção; Proporcionalidade; Matemática para ensinar.

PROPORTIONS: a mathematic for teaching mathematics

ABSTRACT

This text is about an ongoing scientific initiation research. This research is part of the project “Mathematics for teaching’ in the first school years”, of the Federal University of Jataí (Brazil) and it aims to present partial results of research on the theme proportions in pedagogical manual from the late 19th and early 20th century and analyze the perspectives in which the theme has been approached in the current context and in the current Brazilian curricular guiding. Thus, the research is bibliographical and documental. As a result, it was found that the theme of proportions in the first school years was, and still is treated as an integrating and articulating theme of mathematical ideas, thus contributing to the systematization of operations and to the resolution of problems of utility, claiming from the teacher who teaches mathematics multiple knowledge.

Keywords: Proportion; Proportionality; Mathematics for teaching.

¹ Graduanda em Pedagogia, pela Universidade Federal de Jataí (UFJ), ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-4851-6167>. E-mail: limabeatrix@gmail.com

² Doutora em Ciências: Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, pela Universidade Federal de São Paulo (Unifesp). Professor na Universidade Federal de Jataí (UFJ), Jataí, Goiás, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9883-3945>. E-mail: vivianemaciel@ufj.edu.br.

PROPORÇÕES: uma matemática para ensinar matemáticas

RESUMEN

Este texto trata de una investigación de Iniciación Científica en curso. Esta investigación forma parte del proyecto “‘Matemáticas para la enseñanza’ en los primeros años escolares”, de la Universidad Federal de Jataí (Brasil) en desarrollo. La investigación tiene como objetivo presentar resultados parciales de la investigación sobre el tema proporciones en manuales pedagógicos de finales del siglo XIX y las primeras décadas del siglo XX y analizar las perspectivas en que el tema ha sido abordado en el contexto actual y en los documentos rectores curriculares brasileños. Así, la investigación es bibliográfica y documental. Como resultado, se constató que el tema de las proporciones en los primeros años escolares era, y sigue siendo tratado como un tema integrador y articulador de las ideas matemáticas, contribuyendo así a la sistematización de operaciones y a la resolución de problemas de utilidad, reivindicando del profesor que enseña matemáticas múltiples saberes.

Palabras claves: Proporción; Proporcionalidad; Matemáticas para enseñar.

INTRODUÇÃO

O ensino de proporções encontra-se presente na escola brasileira desde a Lei de 15 de outubro de 1827, que criou as escolas de primeiras letras, conforme determinava o artigo 6.º dessa lei, “os Professores ensinarão a ler, escrever as quatro operações d’Arithmetica, pratica de quebrados, decimaes e proporções, as nações mais geraes de geometria pratica [...]”.

A partir dessa lei, tomada como ponto inicial neste texto, o ensino de “proporções” passou a marcar presença na maioria dos Programas de Ensino das escolas primárias brasileiras, e ele ainda consta nas últimas orientações curriculares nacionais, publicadas no Brasil, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018). No entanto, o ensino do tema, em sua grande parte, é recomendado para as séries finais e, não, para as séries iniciais.

Mesmo sendo um tema recorrente na escola há tempos, muitos autores têm se preocupado em relatar as dificuldades no ensino e na aprendizagem de proporções na escola (ARAÚJO; OLIVEIRA; GITIRANA, 2004; GONÇALVES; FREITAS, 2010; LIMA, 2010, entre outros). Dessa maneira, veio a motivação de escrever um plano de trabalho sobre “proporções”, vinculado ao projeto “Matemáticas para ensinar nos primeiros anos

escolares”, da Universidade Federal de Jataí, dada sua relevância e permanência na escola e, portanto, na formação inicial do professor que ensina matemática nos anos iniciais.

Tencionando atingir este objetivo, algumas etapas foram planejadas: escolher manuais pedagógicos que trouxessem orientações ao ensino de proporções no final do século XIX e primeiras décadas do século XX; descrever as principais orientações dos autores desses manuais para o ensino de proporções nos primeiros anos escolares; investigar o que dizem as orientações dos últimos documentos curriculares nacionais para o ensino de matemática nos anos iniciais; e, por fim, verificar aproximações e distanciamentos do que é proposto para o ensino desse saber no contexto atual (desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais).

Cumpridas essas etapas, vislumbramos, ao final deste projeto de iniciação científica, analisar e comparar os conhecimentos docentes presentes nos manuais e interpretá-los como saberes da formação do professor, ou seja, que saberes são reivindicados ao professor para o ensino de proporções?

PROPORÇÕES A PARTIR DE DOIS MANUAIS PEDAGÓGICOS

Para a escolha dos manuais, recorreremos ao acervo digital do Ghemat-Brasil que se encontra no Repositório de Conteúdo Digital (RCD), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), o qual pode ser acessado a qualquer tempo e de qualquer lugar pelo *link*: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>. A busca concentrou-se em manuais pedagógicos publicados no Brasil que abordassem o conteúdo de proporções. O descritor “proporção” possibilitou o encontro do manual pedagógico *Arithmetica Complementar*, 8.^a edição, de Tito Cardoso de Oliveira (192_?), para uso do professor primário e do livro didático *Álgebra Elementar*, de Antônio Trajano, 4.^a edição, de 1905, para uso do aluno da escola primária e estendido ao uso dos professores³ (apresentando dicas a eles no decorrer do corpo do texto).

O manual de Tito Cardoso de Oliveira não traz a data de publicação, mas é possível que pertença à década de 1920 a 1930, uma vez que o prefácio da quarta edição é datado de

³ Como o manual pedagógico era elaborado para uso exclusivo do docente e o livro didático analisado também era indicado ao uso dele, optamos pelo termo “manuais” ao nos referirmos a ambos.

1919, e o manual analisado está em sua 8.^a edição. A escolha pelo manual de Oliveira deu-se pelo fato de ser um manual indicado aos cursos normais (ou seja, para professores que atuavam nas escolas primárias), por contemplar o período da pesquisa (final do século IX e primeiras décadas do século XX) e por ter sido objeto de estudos no âmbito da história da educação matemática e formação de professores (BERTINI; ROCHA, 2018; ROCHA, 2019; ZUIN, 2020, entre outros).

A *Álgebra Elementar*,⁴ de Antonio Trajano (1905), foi escolhida dada a relevância da obra para a disseminação da álgebra na escola primária brasileira e por ter sido contemplada em estudos sobre álgebra do ensino⁵ (BASEI, 2020; ROCHA, 2019; RODRIGUÊS; COSTA, 2022; VIRGENS; ROCHA, 2016; entre outros). Trajano defende o uso de sua “*Álgebra Elementar*”, afirmando no prefácio, que a obra foi elaborada com “simplicidade, clareza e método”, sendo “útil para a vida” e “recreativa ao espírito” e que, por esses motivos, despertaria o interesse dos “discípulos” (alunos). Por ser um livro destinado à escola primária, o autor destaca que foi necessário “abrandar o rigor algébrico”, utilizando uma “linguagem simples e apropriada” e fazendo uso de “problemas [aritméticos] interessantes e recreativos”, assim como de “notas e referências”, o que permitiria, segundo ele, que o manual fosse usado pelos próprios alunos, caso não pudessem contar com a ajuda do professor.

A principal justificativa da escolha desses manuais, além das razões apresentadas, foi o destaque que os autores dão ao uso da álgebra para ensinar proporções. Pesquisas mostram as propostas de Tito de Oliveira (192_?) na utilização de soluções algébricas para resolver problemas (BERTINI; ROCHA, 2018; ROCHA, 2019). Nesta pesquisa, verificamos que isto também acontecia para o ensino de proporções. Tito de Oliveira ensinava proporções sem a preocupação excessiva de definir, detalhar e demonstrar propriedades das proporções do ponto de vista algébrico, algo em que Trajano, em sua *Álgebra*, despendia bastante tempo. Intentamos com as duas propostas para o ensino de proporções, do manual de Tito de Oliveira Cardoso e do livro de Antonio Trajano, que se tenha maior clareza de quais saberes

⁴ A pesquisa de Virgens e Siqueira Filho (2016) toma esse manual em sua 15.^a edição como fonte principal, apresentando detalhes sobre o autor e sua obra com o objetivo de analisar a álgebra e concepções e contextos político a ela atrelados.

⁵ Rodriguês e Costa (2022) apresentam detalhes da obra, ao buscar por elementos de uma *Álgebra* a ensinar na Escola Complementar Catarinense, a partir da análise do livro de Antonio Trajano (1905).

eram reivindicados ao professor para o ensino de proporção. Ou seja, que proporções para ensinar comporia uma “matemática da formação do professor” para o ensino deste tema. Maciel e Fortaleza (2022) definem “matemáticas da formação” como a articulação entre a “matemática para ensinar” e a “matemática a ensinar” (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 68-69). Para as autoras,

A matemática para ensinar – interpretada a partir de documentações vinculadas à formação de professores (que incluem os manuais pedagógicos, os programas de ensino, as revistas pedagógicas, os relatórios de inspetores, os livros de lições professadas, entre outras, ou mesmo as documentações elaboradas para contribuir com o trabalho didático e pedagógico do professor (as apostilas, os artigos em jornais etc.) –, articulada a uma matemática a ensinar - interpretada a partir de documentações ligadas ao ensino e à aprendizagem de rubricas matemáticas (que consideram os conteúdos a ensinar, os planos de ensino, os livros didáticos, as leis que embasam o ensino etc., com o objetivo de orientar práticas docentes) – compõem o que denominamos de **matemáticas da formação do professor** (MACIEL; FORTALEZA, 2022, p.4, grifo nosso).

Então, como interpretar as orientações sobre os saberes que o professor precisava dominar para ensinar proporções em uma matemática da formação do professor?

Peter Burke (2016) ensina que há um longo caminho a percorrer para tornar uma informação em conhecimento. O que Burke denomina conhecimento, algo despersonalizado e objetivado, Valente (2018) denomina de saber. A partir das etapas de transformação de uma informação em conhecimento de Burke, Valente elabora as etapas de interpretação de informações em saberes, tendo em vista as pesquisas sobre os saberes profissionais do professor que ensina matemática.

Assim, tomando Valente (2018) como referência, em um primeiro momento, foi realizada a descrição das orientações dadas aos professores pelos autores dos manuais pedagógicos para o ensino de proporções – “recompilação das experiências docentes” (VALENTE, 2018, p.382). A partir delas, vislumbramos, no andamento da pesquisa, analisá-las à luz dos referenciais teóricos e metodológicos – “análise comparativa dos conhecimentos docentes” e interpretar consensos pedagógicos, tendo em conta os conhecimentos analisados nos manuais pedagógicos – “sistematização e análise do uso de conhecimentos como saberes” (VALENTE, 2018, p. 382-383).

O ENSINO DE PROPORÇÕES POR TITO DE OLIVEIRA E ANTONIO TRAJANO

Tito Cardoso de Oliveira (192_?) introduz o ensino de proporções em um dos capítulos de seu manual, denominado “Proporcionalidades”. O conteúdo aparece tardiamente no manual, na página 206, isto depois de terem sido introduzidos todas as operações, os números primos, os critérios de divisibilidade, as frações e as razões. O autor inicia o ensino do tema, definindo proporcionalidade entre duas razões, indicando que “quando duas razões, por quociente, são iguais, formam uma proporção; e por isso são proporcionais” (OLIVEIRA, 192_?, p. 206). Na sequência, ele menciona que a proporcionalidade pode ser direta ou inversa, explicando que serão duas razões diretamente proporcionais, quando aumentando ou diminuindo uma, a outra igualmente aumenta ou diminui. Como exemplo de razões diretamente proporcionais, o autor cita a razão de número de operários e o trabalho feito por eles, ou seja, se o número de operários dobra, dobra-se o trabalho feito por eles; se o número de operários é reduzido pela metade, o trabalho realizado também se reduz pela metade. Para exemplificar as razões inversamente proporcionais, o autor mostra que, se a razão for formada pelo número de operários e o tempo que eles levam para executar o trabalho, quanto mais operários, menor o tempo, ou quanto menos operários a executar um trabalho, maior o tempo por eles gasto.

Logo após os exemplos, na página seguinte, o autor define proporção (geométrica) como a igualdade entre duas razões por quociente, a partir do seguinte exemplo: $\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$.

A proporção pode também ser representada como $12 : 4 :: 9 : 3$. O autor orienta que se leia: “12 está para 4, assim como 9 está para 3” (OLIVEIRA, 192_?, p. 207). O autor explica que, nesta proporção, 12 e 3 são os extremos, representados pelo 1.º e 4.º termos, enquanto 4 e 9 são os meios, respectivamente os 2.º e 3.º termos. Além disso, menciona que os numeradores são chamados antecedentes (12 e 9), já os denominadores são denominados consequentes (4 e 3). Caso os meios sejam iguais, a proporção é chamada contínua, e esses representam uma média proporcional, que pode ser encontrada a partir da raiz quadrada do produto dos extremos (OLIVEIRA, 192_?, p. 208-209)

Somente depois da definição e da explicação dos termos de uma proporção é que o autor enuncia a propriedade fundamental das proporções: “em toda proporção o producto dos extremos é igual ao producto dos meios” (OLIVEIRA, 192_?, p. 208). O manual apresenta alguns exercícios logo após os exemplos e explicações.

Antes de partir para as práticas das regras de três, o autor também explica sobre a possibilidade de alterações das proporções. Segundo ele, qualquer proporção pode ser alternada, invertida ou transposta sem deixar de satisfazer a propriedade fundamental, conforme o exemplo fornecido pelo autor (OLIVEIRA, 192_?, p.209):

Proporção	$12 : 9 :: 4 : 3$ donde $12 \times 3 = 9 \times 4$
Alternada	$12 : 4 :: 9 : 3$ donde $12 \times 3 = 4 \times 9$
Invertida	$9 : 12 :: 3 : 4$ donde $9 \times 4 = 12 \times 3$
Transposta	$4 : 3 :: 12 : 9$ donde $4 \times 9 = 3 \times 12$

O exemplo mostra que, na proporção $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, temos que o 1.º termo da razão está para o 2.º, assim como o 3.º está para o 4.º termo da razão. Para alterná-la, colocam-se os numeradores e os denominadores como razões proporcionais. Para invertê-la, basta inverter os numeradores (antecedentes) com os denominadores (consequentes) de cada uma das razões e compará-las. Para a transposta, mantêm-se as razões, mas a razão do primeiro membro é permutada com a razão do segundo membro da equação. O autor então explica que, mesmo que uma proporção sofra mais de uma transformação (exemplo, alternada e invertida) ao mesmo tempo, a propriedade fundamental continua válida.

A cada conteúdo, Oliveira (192_?) tem a preocupação, por meio de notas ao professor, de mostrar ao futuro professor que o aluno só deverá passar a um conteúdo posterior quando este estiver “suficiente prático” no conteúdo que estiver sendo ensinado. Ou seja, seria necessário o aluno estar suficientemente prático em frações e razões para então se passar ao ensino de proporções.

Após dar alguns exemplos, solicitando ao aluno que encontre os termos desconhecidos nas proporções, o autor anuncia que as proporções têm diversas aplicações nos cálculos aritméticos. Entre os principais: regra de três (simples – no caso de se ter duas razões, sendo uma completa e a outra com termo desconhecido – e composta); regra de companhia; divisão de lucros; prejuízos em partes proporcionais; regra de juros que se

resolve pela regra de três composta; regra de porcentagem; regra de comissões; regra de descontos; regra de câmbio; regra conjunta; regra de mistura; regra de liga; seguros; regra de falsa posição; regra de combinações; regra de progressões. Muitas regras eram relativas a temas ligados ao comércio, uma das indicações do manual, sempre na forma de problemas⁶.

O ensino de proporções contribui para encontrar números desconhecidos, condição fundamental para resolver problemas pela regra de três simples e composta. As regras de três simples (que se resolve por uma só proporção) e compostas (que se resolve por mais de uma proporção). Na regra de três, dado três números conhecidos, havia um número desconhecido, denominado “x”.

Do mesmo modo que Tito de Oliveira (192_?), Trajano (1905) traz explicações sobre os termos de uma proporção, mas sempre com a preocupação de generalizar os termos e suas propriedades. Além disso, Trajano faz questão de mostrar a diferença entre razão e proporção, de modo a anteceder o estudo de proporções, conforme o manual de Tito de Oliveira. Enquanto Oliveira apresenta a propriedade fundamental das proporções, Trajano prioriza o detalhamento e a generalização da propriedade fundamental, seguida de mais nove propriedades, num total de dez, todas com as suas respectivas demonstrações. O autor coloca o tema “Proporções” como penúltimo em seu livro, antecedendo apenas o ensino de “Progressões” (aritméticas e geométricas). Um resumo delas é apresentado no Quadro 1, a partir da proporção $a : b :: c : d$ (leia-se: a está para b, assim como, c está para d).

Quadro 1 – Resumo das propriedades sobre proporções

Propriedades	Resumo de cada propriedade
1. ^a Propriedade	Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então, $a.d = b.c$
2. ^a Propriedade	Se $a.d = b.c$, então, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
3. ^a Propriedade	Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então, $a = \sqrt{b.c}$
4. ^a Propriedade	Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
5. ^a Propriedade	Se $b.c = a.d$, então, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
6. ^a Propriedade	Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e se for adicionada uma unidade a cada membro $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, ou seja, $\frac{a+1}{b} = \frac{c+1}{d}$
7. ^a Propriedade	Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e se for subtraída uma unidade de cada membro

⁶ Os problemas envolvendo cálculo de proporções geralmente apresentavam questões nas quais havia, pelo menos, uma quantidade desconhecida ou um número a serem encontrados.

	$\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} - 1$, ou seja, $\frac{a-b}{b} = \frac{a-b}{b}$
8. ^a Propriedade	Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e se for multiplicada ambos os membros por $\frac{e}{f}$, ou seja, $\frac{a \cdot e}{b \cdot f} = \frac{c \cdot e}{d \cdot f}$
9. ^a Propriedade	Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e também $\frac{a}{e} = \frac{c}{h}$ e se $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{e} \times \frac{c}{h}$, então, $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{e \cdot h}$
10. ^a Propriedade	Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e se elevados todos à potência n, então, $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$

Fonte: *Algebra Elementar*, de Trajano (1905, p.170-173)

No livro de Trajano, algumas propriedades são seguidas de problemas para serem resolvidos com a função de exercitar as propriedades ensinadas e, não, de resolver situações do cotidiano. Também não há explicações do autor para a apresentação de razões e proporções após o ensino de equações, e antes do ensino de progressões. Algumas propriedades de proporções se referem à demonstração de que uma proporção geométrica conserva sua proporcionalidade se invertida ou alternada. Outras propriedades mostram que, se um mesmo valor for adicionado, subtraído ou multiplicado ao primeiro e ao segundo membro de uma equação entre duas razões, a proporção se conservará. Isso também será válido, se os termos das razões forem elevados a uma mesma potência. Após cada demonstração, Trajano “aritmética” a propriedade algébrica, apresentando casos particulares com exemplos numéricos, justificando que os alunos deveriam verificar numericamente cada uma das propriedades.

Observamos que os manuais pedagógicos analisados colocam acento no conceito de proporcionalidade descrito como razão, levando o aluno a comparar partes, igualar, bem como realizar a equivalência entre as razões, com o objetivo principal de resolver problemas, tanto para exercício da propriedade algébrica (*Algebra*, de Trajano), como para resolução de problemas de utilidade prática com uso de regra de três (*Arithmetica*, de Oliveira). Podemos inferir que este último parte da aritmética, generalizando-a, buscando facilitar a resolução de problemas do cotidiano, alinhando-se aos pressupostos da Escola Nova. Enquanto o primeiro autor, “aritmética” propriedades algébricas, procurando possivelmente dar um sentido “prático” ao ensino das propriedades, com algo conhecido pelas crianças, os números.

PROPORÇÕES NO CONTEXTO ATUAL

Verificamos que, nos livros e nos manuais do início do século XX, o tema proporções era um dos últimos conteúdos a ser ensinado na escola primária, marcando o final dela ou a passagem para a escola secundária. Com o objetivo de investigar aproximações e distanciamentos entre finalidades de ensino em cada tempo, sentimos a necessidade de conhecer um pouco mais sobre o tema a partir de pesquisas bibliográficas e do que dizem as orientações ao ensino de proporções em documentos orientadores curriculares brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017, p. 947, grifos nossos) investigaram 17 artigos sobre o tema, identificando três cenários para o conceito de proporções.

No primeiro, o conceito de proporcionalidade foi descrito como **razão e realizou-se como comparação entre partes, equivalência de razões, taxa, escala, divisão, vetor e intervalos musicais**. No segundo cenário, o conceito de proporcionalidade foi descrito pela **igualdade entre razões, sustentado pelo teorema de Tales, cujas realizações foram regra de três e porcentagem**. No último cenário, esse conceito foi apresentado como uma **função, por meio de relações multiplicativas, taxa de variação, escala e porcentagem** [como operador].

Conhecer tais cenários permitiu perceber que o ensino de proporções estaria em lugar de intersecção de diferentes campos da matemática (geometria, aritmética, álgebra), configurando-se como uma matemática para ensinar matemáticas. Isto nos levou a pensar nos saberes que eram reivindicados no início do século XX para o professor ensinar proporções (objetivo da versão final deste trabalho) e nos saberes demandados hoje (para pesquisas futuras).

Ao ir em busca das orientações, verificamos que, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997, p.22), proporcionalidade é definida como uma “ideia fundamental” que deve ser desenvolvida, pois é útil para a vida ou mesmo para o desenvolvimento do raciocínio. O tema também é chamado de princípio geral, capaz de ser reconhecido a partir de ideias matemáticas e que contribui para inúmeros processos como estabelecer analogias, induzir ou deduzir (p.29). Outra denominação, além de ideia matemática, é a de procedimento matemático, “fontes naturais de inter-relação” (p.38). De acordo com o documento:

A proporcionalidade, por exemplo, está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Ele está ligado à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (Essa resposta faz sentido? Ela deveria ser maior ou menor?). Para raciocinar com proporções é preciso abordar os problemas de vários pontos de vista e também identificar situações em que o que está em jogo é a não-proporcionalidade (BRASIL, 1997, p.38).

De acordo com os PCN, a proporcionalidade está presente no ensino de vários temas matemáticos e pode ser explorada a partir de situações-problema diversos, conforme os cenários mencionados por Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017) como equivalência entre razões e, mesmo, porcentagem e regra de três. Os cenários de proporção, como função, parecem não ser muito explorados nesse documento. Como os PCN são apresentados em Blocos (Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação), a proporcionalidade é um dos temas que contempla a conexão entre eles (p.40).

O documento também indica a ideia de proporcionalidade como um dos grupos de trabalho para o ensino de multiplicação e divisão ligada à comparação entre razões. O texto traz alguns exemplos, em forma de situações-problema para o ensino de multiplicação nos anos iniciais, como:

- Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R\$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes? (A ideia de proporcionalidade está presente: 1 está para 8, assim como 3 está para 24.)
- Dois abacaxis custam R\$ 2,50. Quanto pagarei por 4 desses abacaxis? (Situação em que o aluno deve perceber que comprará o dobro de abacaxis e deverá pagar — se não houver desconto — o dobro, R\$ 5,00, não sendo necessário achar o preço de um abacaxi para depois calcular o de 4.) (BRASIL, 1997, p.72)

E a partir das situações com multiplicação, como as supracitadas, o documento mostra que é possível conferir significados à divisão, sugerindo alguns exemplos associados “às ações ‘repartir (igualmente)’” e “determinar quanto cabe”.

- Marta pagou R\$ 24,00 por 3 pacotes de chocolate. Quanto custou cada pacote? (A quantia em dinheiro será repartida igualmente em 3 partes e o que se procura é o valor de uma parte.)
- Marta gastou R\$ 24,00 na compra de pacotes de chocolate que custavam R\$ 3,00 cada um. Quantos pacotes de chocolate ela comprou? (Procura-se verificar quantas vezes 3 cabe em 24, ou seja, identifica-se a quantidade de partes.) (BRASIL, 1997, p.72)

O documento ainda afirma que o professor pode se apoiar no conceito de proporcionalidade no ensino de cálculo de estimativas (BRASIL, 1997, p.77).

No documento atual, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), a proporcionalidade compõe junto com equivalência, ordem, interdependência, representação, variação e aproximação, as “ideias fundamentais” capazes de articular os campos que compõem a matemática. Segundo o documento:

A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p.268).

O ensino de proporções com ênfase em funções é destacado no ensino das “Unidades Temáticas”, Números, Álgebra e Geometria. Em Álgebra, o documento enfatiza que

A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: “Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?” (BRASIL, 2018, p.270).

A proporcionalidade aparece neste documento como exemplo do terceiro cenário apontado por Meduni-Bortoloti e Barbosa (2017), que é a noção de função. Tanto nos PCN, quanto na BNCC a proporcionalidade representa uma importante ferramenta para resolver problemas do campo da aritmética, álgebra e geometria, ou seja, uma matemática para ensinar matemáticas.

A proporcionalidade também não fica de fora da unidade temática “Geometria”. Nela a proporcionalidade tem destaque no ensino do teorema de Tales ou mesmo no ensino de equivalência entre áreas (BRASIL, 2018, p.272). De modo explícito neste documento, a proporcionalidade somente aparece no ensino de números (4.º ano do Ensino Fundamental), no ensino de álgebra e geometria (5.º do Ensino Fundamental) expressa nos seguintes “objetos de conhecimento/ habilidades”, no Quadro 2:

Quadro 2: O tema proporcionalidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Unidade Temática	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Número (4.º ano do EF)	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade , repartição equitativa e medida	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos
Álgebra (5.º ano do EF)	Grandezas diretamente proporcionais: Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo
Geometria (5.º ano do EF)	Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais

Fonte: BRASIL (2018, p. 290-297, grifo nosso)

A leitura e a análise dos documentos oficiais nos deram elementos para verificar que o ensino de proporções ainda hoje se configura como tema integrador entre os campos da

matemática. Um estudo de como o tema se apresenta hoje em livros didáticos contribuiria para validar esta afirmação que os documentos trazem.

Já na escola do final do século XIX e início do século XX, o tema foi ferramenta para compreender relações diversas entre razões, nas quais o conhecimento das propriedades gerais poderia contribuir e agilizar a resolução de problemas, ou ainda como ferramenta para resolver problemas de diferentes temas do comércio com o uso da regra de três simples e composta.

Dessa maneira, as proporções podem ser interpretadas como um saber para ensinar outros saberes, ou, de modo mais específico, como uma matemática para ensinar matemáticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa de iniciação científica foi motivada pelo fato de o tema “proporções” estar presente nos manuais pedagógicos do final do século XIX e continuar presente até hoje nos documentos orientadores curriculares atuais.

Segundo os manuais analisados, o professor era orientado a ensinar proporções para contribuir com a resolução de problemas de aplicação do conteúdo ensinado ou de problemas voltados a questões da vida prática. Trajano (1905), por exemplo, despende bastante tempo com os problemas, para cuja solução fossem utilizadas as regras de três, simples e composta; com os problemas de porcentagem ou que envolvessem cálculo de comissões, câmbio, seguros, descontos, juros, além daqueles sobre ligas, misturas entre outros. Oliveira (192_?), do mesmo modo, mostra o mesmo objetivo, trazendo problemas de proporções com soluções algébricas, o que reafirma o resultado da tese de Rocha (2019), ou seja, de uma “álgebra para resolver problemas”.

Nos manuais analisados, verificamos que o tema articula dois campos: aritmética e álgebra. Em sua *Arithmetica Complementar*, Oliveira (192_?) enfatizava as soluções algébricas para problemas aritméticos. Em sua *Algebra Elementar*, Trajano (1905) trazia exemplos numéricos para testar as propriedades algébricas. Em ambos, cumpria ao professor dominar o ensino de proporções, como razões (equivalência, igualdade, comparação entre razões), regra de três, porcentagens, entre outros. Além disso, as proporções tinham *status*

de uma ferramenta para resolver problemas da vida, fossem eles práticos – porcentagem, liga, misturas etc., pelas regras de três (como na *Arithmetica*, de Oliveira), fossem problemas propostos para exercício das propriedades algébricas, principalmente como na *Algebra*, de Trajano.

Ainda hoje o tema “proporções” se encontra presente nos últimos documentos orientadores curriculares brasileiros e, parece-nos, ainda com a finalidade de ser um tema integrador e articulador de ideias e processos matemáticos, útil para resolver problemas de diferentes campos da matemática. Os cenários para o conceito de proporcionalidade, apontados por Meduni-Bortoloti e Barbosa (2017), a saber, reivindicam do professor o domínio de proporção como razão, igualdade de razões e funções.

Na continuação desta pesquisa, pretendemos interpretar de modo mais aprofundado e abrangente as proporções como tema articulador de campos da matemática (aritmética, geometria e álgebra), ou seja, matemática para ensinar matemáticas, buscando pelos saberes que eram solicitados ao professor para o ensino desse tema.

AGRADECIMENTOS

À Pró-Reitoria de Pesquisa e Inovação da Universidade Federal de Jataí. Ao Grupo de Estudos e Pesquisa de Educação Matemática nos Anos Iniciais - GEMAIS/UFJ.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, F.F.N.; OLIVEIRA, M. G.de.; GITIRANA, V. A resolução de problemas de proporções ao longo das séries da escola básica. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 8, 2004. Recife-Pernambuco. **Anais [...]**, v.1, n.1, p. 1-13, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/1CC42647940487.pdf> . Acesso em: 18 mar. 2023.

BASEI, A. M. **Processos e Dinâmicas de Institucionalização da Álgebra na Formação de Professores dos Primeiros Anos Escolares**, São Paulo (1880 – 1911). 194f. 2020. Tese (Doutorado em Ciências) – Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219667> . Acesso em: 20 mar. 2023.

BERTINI, L. F., MORAIS, R. S., VALENTE, W. R. **A matemática a ensinar e a matemática para ensinar**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

BERTINI, L. DE F.; ROCHA, I. L. DA. “Resolução de problemas pelas equações algébricas”: a proposta de Tito Cardoso de Oliveira para o ensino das operações. **HISTEMAT** - Revista de História da Educação Matemática, v. 4, n. 3, 25 dez. 2018. Disponível em: <https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/234> . Acesso em: 10 mar. 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ministério da Educação e Cultura, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação e Cultura, 2018.

BURKE, P. **O que é a história do conhecimento?** Rio Claro: Editora Unesp, 2016.

GONÇALVES, M. J. S. V.; FREITAS, J. L. M. Um estudo da oralidade na resolução de problemas de proporcionalidade no Ensino Fundamental. **Revista Em Teia**, v. 3, n. 1, p. 1-22, jan. 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2170/1739>. Acesso em: 15 mar. 2023.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (org.). **Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 113-172.

LIMA, D. T. de. **Erros no processo de resolução de equações do 1.º grau**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2010. Disponível em: http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_LimaDT_1 . Acesso em: 20 mar. 2023.

MACIEL, V. B. “**Matemáticas para ensinar**” nos primeiros anos escolares. Projeto de Iniciação Científica, PI04477-2020, Universidade Federal de Jataí, Faculdade de Educação, 2020.

MACIEL, V. B.; FORTALEZA, F. J. DOS S. Novas propostas de ensino dos saberes matemáticos na formação: uma aritmética e uma geometria intuitivas. **HISTEMAT** - Revista de História da Educação Matemática, v. 8, p. 1-15, 17 nov. 2022. Disponível em: <https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/525> . Acesso em: 13 mar. 2023.

MENDUNI-BORTOLOTTI, R. D’A.; BARBOSA, J. C. A construção de uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Bolema**, v. 31, n. 59, p. 947-967, dez. 2017. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/xGHxYjVBQb3Zs7JnqkSQyqb/abstract/?lang=pt> . Acesso em: 08 mar. 2023.

OLIVEIRA, T. C. **Arithmetica Complementar**: para os cursos primário complementar, normal e comercial. Pará, 192_?. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1635> . Acesso em: 18 mar. 2023.

ROCHA, I. L. da. **Álgebra para resolver problemas**: as propostas de Otelo de Souza Reis e Tito Cardoso de Oliveira, década de 1910. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/201746>. Acesso em: 19 mar. 2023.

RODRIGUÊS, J. S.; COSTA, D. A. da. A álgebra para o ensino complementar de Santa Catarina a partir da “Algebra Elementar” de Antonio Trajano. *In: SEMINÁRIO TEMÁTICO INTERNACIONAL*, 20., 2022, online. **Anais [...]**. 2022. p. 1-20. Disponível em: <https://anais.ghemat-brasil.com.br/index.php/STI/article/view/126> . Acesso em: 18 mar. 2023.

TRAJANO, A. **Álgebra Elementar**. 5. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1905. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160598> . Acesso em: 16 mar. 2023.

TRAJANO, A. **Álgebra Elementar**. 15. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1932. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/104463> . Acesso em: 11 mar. 2023.

VALENTE, W. R. Processos de investigação histórica da constituição do saber profissional do professor que ensina matemática. **Revista Acta Scientiae**, n.20, v. 3, p. 377-385, 2018. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3906/317> . Acesso em: 10 mar. 2023.

VIRGENS, J. O. das; SIQUEIRA FILHO, M. G. A Álgebra Elementar de Antônio Trajano: entre teorias e concepções na década de 1930. *In: SEMINÁRIO TEMÁTICO SABERES ELEMENTARES MATEMÁTICOS DO ENSINO PRIMÁRIO (1890-1970): SOBRE O QUE TRATAM OS MANUAIS ESCOLARES?* 14., Natal, 2016. **Anais [...]**. Natal: GHEMAT, 2016. p.1-15. Disponível em: https://xivseminariotematico.paginas.ufsc.br/files/2016/05/VIRGENS_SIQUEIRAFILHO_T2_vf.pdf . Acesso em: 19 mar. 2023.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Propostas para o ensino do sistema métrico no Pará pelas mãos de Tito Cardoso de Oliveira. **Amazônia**: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, v. 16, n. 36, p. 142-158, jul. 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/7636>. Acesso em: 25 mar. 2023.