XXII Seminário Temático Internacional
PRODUÇÃO, CIRCULAÇÃO E APROPRIAÇÃO DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO E PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES, SÉCULO XX
São Luis – Maranhão, 22 a 24 de maio de 2024
GHEMAT-Brasil

ISSN: 2357-9889

Uma análise histórica e matemática da construção da tabela de cordas de Cláudio Ptolomeu

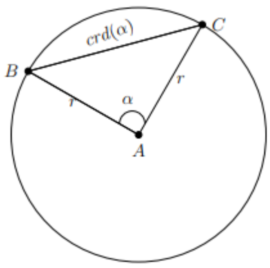
Mônica de Cássia Siqueira[1]

Isabela Cristina Oliveira[2]

INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda um recorte do Trabalho de Conclusão de Curso defendido em fevereiro de 2024 que trata de parte da História da Trigonometria desenvolvida na Grécia antiga, por meio de um estudo sobre a construção de uma tabela de cordas de Cláudio Ptolomeu (~100 e.c. - ~170 e.c.). Esta tabela se baseia na variação do comprimento de uma corda, com relação ao ângulo central de um círculo, oposto a ela, conforme Figura 1.

Figura 1 - $crd(\alpha)$ oposta ao ângulo α



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Segundo Rodrigues (2020), Ptolomeu viveu em um período em que os gregos estavam estudando o Universo. Por isso, construiu uma teoria planetária, em sua obra, *Almagesto*, obra dividida em 13 livros, onde o primeiro deles é destinado a descrever a matemática utilizada para construir sua teoria, incluindo a tabela de cordas e os métodos de construção (O'Connor e Robertson, 1999). No livro I, capítulo IX, consta o procedimento que Ptolomeu usou para encontrar as cordas de 36°, 72°, 60°, 90° e 120°.

Objetivamos, então, compreender os métodos matemáticos adotados no livro I, capítulo IX, por Ptolomeu, para o cálculo das cordas de 36°, 72°, 60°, 90° e 120°, bem como

[1] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP-Rio Claro). Professora na Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3143-9206 E-mail: monica.siqueira@uftm.edu.br

[2] Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). Professora no Colégio Nossa Senhora das Dores (CNSD). ORCID: https://orcid.org/0009-0001-1253-5008 E-mail: isabela.oliveira2311@gmail.com

ISSN: 2357-9889

o contexto histórico e social em que viveu este matemático, a fim de responder à seguinte pergunta de pesquisa: Qual matemática usada por Ptolomeu no livro I, capítulo IX do Almagesto que podemos interpretar como sendo trigonométrica?

METODOLOGIA

Neste estudo, exploramos fenômenos relacionados ao tempo, espaço e cultura, sob múltiplas perspectivas. Conforme defende Silveira et al. (2009), este tipo de estudo enquadra-se no tipo qualitativo, sendo este o modo como se classifica esta pesquisa. Fonseca (2002) afirma também que uma pesquisa que se baseia em levantamentos teóricos já analisados e publicados, é bibliográfica. Por utilizarmos obras que interpretam e narram contextos históricos ligados à Trigonometria, esta é uma pesquisa bibliográfica.

Buscamos por documentos que abordam a História da Trigonometria, o que vai ao encontro do conceito de pesquisa documental de Fonseca (2002). Destacamos que esta é também uma pesquisa histórica, uma vez que queremos compreender o desenvolvimento de conceitos que conhecemos hoje como trigonométricos, em uma civilização antiga. Para fazermos a pesquisa histórica, se torna necessária uma investigação por meio de fontes.

Costa e Barros (2012) nos informam que podemos considerar como fonte, qualquer meio de informação que nos permita conhecer sobre uma realidade já vivida. Na visão dos autores, as fontes diretas são aquelas nas quais o autor obtém o seu objeto de pesquisa a partir de uma informação que não é intermediada. Já as fontes indiretas, são transmitidas ao pesquisador por um ou mais intermediários.

No presente estudo usamos o livro traduzido por Fernandez e Montes (2003), intitulado "El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo: Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo", o qual classificamos como uma fonte indireta de informações, uma vez que, fora traduzido do latim para o espanhol.

Para Bloch (2002), observar um advento sob uma perspectiva histórica consiste em buscar evidências e documentos que o provem. Siqueira e Vieira (2023) destacam que a pesquisa histórica não traz em seus resultados, verdades absolutas, já que são influenciadas pela interpretação dos pesquisadores. Nesse sentido, embora não tenhamos partido de uma fonte direta, a fonte indireta usada nos proporcionou meios de evidenciar a matemática usada por Ptolomeu, e assim, foi possível fazer a análise do material como sugerido em Bloch

ISSN: 2357-9889

(2002) e Siqueira e Vieira (2023), considerando então o contexto em que este está inserido e tudo o que o envolve.

UM BREVE CONTEXTO

Funari (2001) nos informa que era parte da cultura grega preocupar-se em compreender a natureza racionalmente. Para compreender o Universo, os astrônomos estudavam o movimento e a disposição dos astros nele. Estes pensadores chegaram ao modelo de mundo geocêntrico e construíram teorias que mostrassem a disposição dos astros no Universo de acordo com ele.

Um dos cientistas gregos que trabalhou com o sistema de mundo foi Ptolomeu, que de acordo com O'Connor e Robertson (1999), viveu entre 85 e.c e 165 e.c, era filósofo e astrônomo. Estes autores nos informam que o que se sabe da vida de Ptolomeu é que o seu nome Claudius Ptolemy indica a descendência de uma família grega que vivia no Egito.

No que se refere aos seus trabalhos, os autores trazem que uma de suas contribuições mais usadas foi a publicação do Almagesto, uma coleção de 13 livros que trata dos movimentos dos astros. Segundo O'Connor e Robertson (1999), Ptolomeu propôs um Sistema Planetário, baseando-se nessas concepções geocêntricas. Este sistema foi referência para estudos astronômicos sobre a concepção do universo até o século XIV, quando as teorias Heliocêntricas começam a ser divulgadas.

No livro *Almagesto*, Ptolomeu descreveu, segundo O'Connor e Robertson (1999), a matemática necessária para a construção da teoria que aborda os corpos celestes, fazendo parte desta matemática, a sua teoria de cordas. Para isso, Ptolomeu utilizou a obra *Elementos*, escrita por volta do século III a.e.c. atribuída à Euclides (~325 a.e.c. – ~265 a.e.c.).

UMA INTERPRETAÇÃO DOS MÉTODOS PARA CALCULAR CORDAS

No capítulo IX do livro I do Almagesto, "Sobre as medidas das linhas retas desenhadas no círculo", Ptolomeu (2003) mostrou métodos para calcular cordas. Para tanto, ele adotou um círculo com diâmetro de 120 partes[3] e o raio de 60 partes. Ptolomeu utilizou a base sexagesimal, o que nos levou a inferir que utilizava um círculo de raio unitário, nesta

[3] Compreendemos que o termo partes foi designado como o que consideramos, atualmente, como uma unidade de medida.

ISSN: 2357-9889

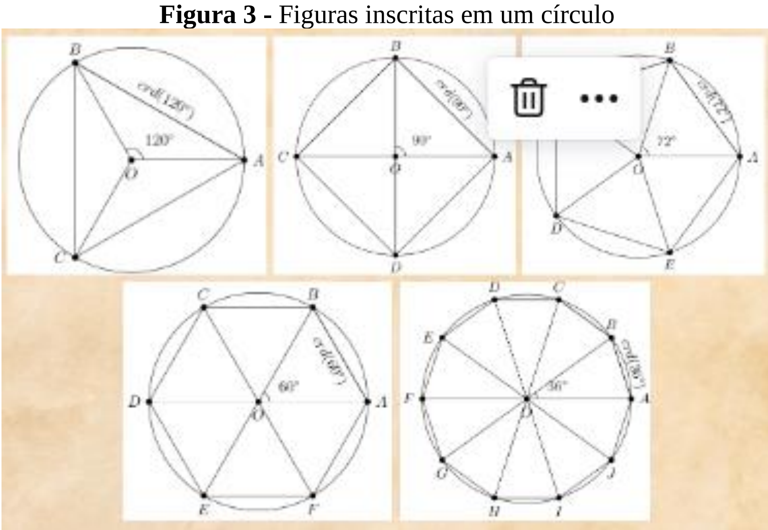
base. E, assim como fazemos hoje, Ptolomeu (2003) adotou um círculo dividido em 360 partes.

No livro são apresentados problemas e, em seguida suas soluções.

> Sobre a ciência das cordas: Dado o diâmetro de um círculo, averiguar os lados do decágono, do hexágono, do pentágono, do quadrado e do triângulo equilátero, todos eles inscritos em um mesmo círculo. (PTOLOMEU, 2003, p. 68)

Observamos que o autor utiliza as medidas dos lados de figuras inscritas em um círculo para encontrar cordas, já que estas medidas representavam o valor das cordas dos ângulos centrais opostos a elas, como ilustrado na Figura 3.

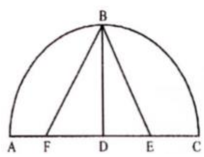
Figura 3 - Figuras inscritas em um círculo



Fonte: Elaborada pelas autoras.

Para encontrar estes valores, Ptolomeu (2003) partiu dos seguintes procedimentos a partir de uma semicircunferência de cujo diâmetro é AC: (i) Traçar um segmento DB, tal que $DB \perp AC$; (ii) Marcar em DC seu ponto médio E; (iii) Unir os pontos B e E, formando BE; (iv) Denotar um ponto F no segmento AD sendo $BE = EF$; (v) Traçar o segmento BF. A figura construída por meio destes procedimentos, é a representada na Figura 4.

Figura 4 - Construção para encontrar as medidas dos lados dos polígonos



Fonte: Ptolomeu (2003)

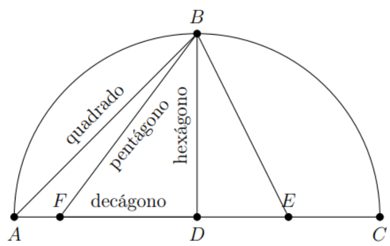
Desta construção, Ptolomeu (2003) provou que FD representa o lado do decágono

ISSN: 2357-9889

inscrito nesse círculo, por meio de proposições do livro Elementos. Concluiu que $FD.FC = DC^2$. Utilizando a proposição 17, do livro VI dos Elementos, afirma que então os segmentos $FD, FC\ e\ DC$ são proporcionais.

Ainda utilizando a mesma proposição 17 do livro VI dos Elementos, Ptolomeu (2003) afirmou que, dados os segmentos $FD, FC\ e\ DC$, se DC é o maior segmento pertencente à FC, então DC representa o lado do hexágono inscrito no círculo. E, ainda, FD representa o lado do decágono inscrito neste mesmo círculo. Acrescentando à Figura 4 um novo segmento AB, utilizando a proposição 6, do livro IV dos Elementos, Ptolomeu (2003) mostra que este segmento representa o lado do quadrado inscrito nesse círculo. Da construção da Figura 4, Ptolomeu (2003) obteve então o resultado mostrado, aqui, na Figura 5.

Figura 5 - O lado das figuras inscritas no círculo



Fonte: Elaborada pelas autoras.

Partindo então, da construção e das informações apresentadas na Figura 5, bem como de outras proposições do livro Elementos, Ptolomeu (2003) calculou as medidas dos lados do triângulo equilátero do quadrado, do pentágono, do hexágono e do decágono inscritos no mesmo círculo. Utilizando a linguagem matemática atual, apresentaremos nossa interpretação destes cálculos.

Utilizando a Figura 5, vamos chamar de $r = DC$ o raio do círculo. Vamos, então, encontrar a medida FD que representa a medida do lado do decágono inscrito na circunferência.

Sejam: $DC = r = BD$ e $DE = \frac{r}{2}$. Logo:

$$BE^2 = BD^2 + DE^2 \Rightarrow BE^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow BE = \frac{r\sqrt{5}}{2}$$

e, como $BE = EF$, então $EF = \frac{r\sqrt{5}}{2}$. Por outro lado, $FD = FE - DE$, então:

$$FD = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2} \Rightarrow FD = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

ISSN: 2357-9889

Observe o triângulo retângulo BDF, retângulo em D, na figura 4. Usando uma das relações métricas do triângulo retângulo, obtemos a medida BF, que representa a medida do lado do pentágono inscrito na circunferência:

$$BF^2 = BD^2 + FD^2 \Rightarrow BF^2 = r^2 + \left(\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^2 \Rightarrow BF = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

Observando o triângulo retângulo ABD, retângulo em D, a partir de uma das relações métricas do triângulo retângulo, obtemos a medida do lado do quadrado inscrito AB:

$$AB^2 = DA^2 + DB^2 \Rightarrow AB^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow AB = r\sqrt{2}$$

Temos os valores de $AB, DB, BF\ e\ FD$ como sendo os lados do quadrado, hexágono, pentágono e decágono inscritos em um círculo de raio r, respectivamente, correspondendo aos valores das cordas apresentadas na Figura 3.

Ptolomeu obteve ainda, o lado do triângulo equilátero, utilizando a proposição 12 do livro XIII dos Elementos, o qual seria $r\sqrt{3}$. Em Ptolomeu (2003), como já dito, foi utilizado $r = 60$ partes. Os resultados obtidos por ele são representados com a parte inteira na base decimal, enquanto a parte fracionada é apresentada na base sexagesimal. Substituindo os valores encontrados para $r = 60$, e relacionando com os respectivos valores de cordas, apresentamos na última coluna da tabela 1, os valores das cordas apresentados por Ptolomeu.

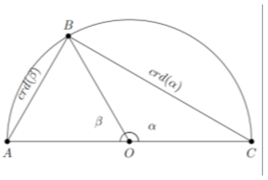
Tabela 1 - Tabela de cordas

Figura	**Corda**	**Valor para r**	**Valor para $r = 60$**
Decágono de lado l_{10}	$crd(36°) = l_{10}$	$\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$	37.4.55
Pentágono de lado l_5	$crd(72°) = l_5$	$\frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	70.32.3
Hexágono de lado l_6	$crd(60°) = l_6$	r	60
Quadrado de lado l_4	$crd(90°) = l_4$	$r\sqrt{2}$	84.51.10
Triângulo de lado l_3	$crd(120°) = l_3$	$r\sqrt{3}$	103.55.23

Fonte: Elaborada pelas autoras.

O segundo problema enunciado em Ptolomeu (2003, p.68), denotado por ele como corolário primeiro, foi: “Dada a corda de um arco, se chegará a conhecer a corda do arco restante do semicírculo”. Em outros termos, seja o semicírculo ABC, de raio r, representado na Figura 6. Se conhecemos a corda AB, conseguimos encontrar a corda BC.

Figura 6 - Cordas de ângulos suplementares



Fonte: Elaborada pelas autoras.

ISSN: 2357-9889

Uma interpretação do problema apresentado é a que segue. Seja a corda de um arco α, podemos conhecer a corda do arco β suplementar a α. Isto é, $\alpha + \beta = 180° \quad (i)$.

Demonstração: Seja o semicírculo representado na Figura 6. Nela, temos um triângulo ABC, retângulo em B, pela proposição 31, do livro III, dos Elementos, inscrito neste semicírculo. Logo, $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Se $AC = 2r,\ AB = crd\ (\beta)\ e\ BC = crd\ (\alpha)$, então: $(2r)^2 = crd(\alpha)^2 + crd(\beta)^2$. Logo, $crd(\alpha)^2 + crd\ (\beta)^2 = 4r^2$.

De (i) temos que: $crd(\alpha)^2 + crd(180 - \alpha)^2 = 4r^2$. Com isso, compreendemos que, conhecendo o valor de $crd(\alpha)$, podemos calcular o valor de $crd(\beta)$ tal que $\beta = 180 - \alpha$. Isso, por meio da equação:

$$crd(\alpha)^2 + crd(180 - \alpha)^2 = 4r^2.$$

A partir deste corolário foi possível encontrar outras cordas para a construção da tabela.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A compreensão do pensamento matemático da Grécia Antiga, bem como o estudo histórico do período em questão, facilitou a interpretação dos conceitos de Ptolomeu, que divergem da linguagem matemática contemporânea. Já a análise biográfica de Ptolomeu e seu contexto histórico e social foram cruciais para compreendermos suas contribuições. O Almagesto combinou astronomia com a matemática existente da época, demonstrando que a matemática fazia parte do desenvolvimento social na antiguidade.

Acreditamos que a tabela de cordas, construída por Ptolomeu (2003), seja trigonométrica, uma vez que estabeleceu uma relação entre os ângulos e os lados de um triângulo, traçado a partir de uma corda em um círculo, e atualmente, o que denominamos como Trigonometria também envolve o estudo da relação entre ângulos e lados de um triângulo. Ptolomeu relacionou o ângulo central de uma circunferência com a corda oposta a esse ângulo.

Esta teoria de cordas pode ser interpretada como parte da história da Trigonometria moderna, mostrando que o que conhecemos hoje por Trigonometria já era utilizado por outras civilizações antes de levar este nome. Isto responde nossa pergunta de pesquisa, que buscava interpretar a matemática desenvolvida por Ptolomeu que podemos interpretar como

ISSN: 2357-9889

trigonométrica. Por construir uma tabela estabelecendo uma relação entre os lados e os ângulos de um triângulo e utilizar de um círculo de raio unitário como base para os cálculos, podemos interpretar a construção da tabela de cordas de Ptolomeu como parte da história da Trigonometria.

REFERÊNCIAS

BLOCH, M. **Apologia da história**, ou o ofício do historiador. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002.

COSTA, J. e BARROS, A. Fontes Históricas: revisitando alguns aspectos primordiais para a Pesquisa Histórica. Mouseion, v. 1, n. 12, p. 129-159, 2012. Disponível em: https://revistas.unilasalle.edu.br/index.php/Mouseion/article/view/332. Acesso em: 03 ago, 2023.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica.** Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

FUNARI, P. P. **Grécia e Roma**. Contexto, 2001. Disponível em: https://www.academia.edu/download/34107018/Livro-Grecia-e-Roma.pdf. Acessado em 9 de novembro de 2023.

O'CONNOR, J. J. e ROBERTSON, E. F. Hipparchus of Rhodes. MacTutor, Apr 1999. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hipparchus Acesso em: 24 out. 2022, 15:12.

PTOLOMEU, C. **Sobre as medidas das linhas que se traçam no círculo.** Almagesto. São Paulo. Maxtor. 2003. Tradução e introdução de FERNANDEZ, P. A e MONTES, L. A. S.

RODRIGUES, M. V. S. Construção de tabelas de seno nas civilizações Grega, Árabe e Indiana. 2020. Orientador: Prof. Dr. Nilton Barroso. 2020. 69 f. Dissertação. Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/38628. Acesso em: 03 ago. 2023, 19:39.

SILVEIRA, D. T. A pesquisa científica. In: GERHARDT, Tatiana Engel (Org.). **Métodos de pesquisa**, Rio Grande do Sul, 2009. Disponível em: https://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 03 ago. 2023, 19:40.

SIQUEIRA, M. C.; VIEIRA, G. F. **Algumas vertentes de pesquisas em História da Matemática na Universidade Federal do Triângulo Mineiro em Educação em Ciências e Matemática: pesquisas, relatos e reflexões do PPGECM/UFTM**, editado por Pedro & João Editores. São Carlos: Pedro & João Editores, 2023. 255p.

Palavras-chave: Trigonometria; Tabela de cordas; Cláudio Ptolomeu.