



VARIÁVEIS EM MOVIMENTO: problematizações históricas para o estudo de Cálculo na formação inicial de professores de matemática

Luciana Bertholdi Machado¹

Iran Abreu Mendes²

Este trabalho apresenta resultados preliminares de uma pesquisa de doutorado em andamento vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Rede REAMEC, UFMT. A pesquisa objetiva realizar uma prática investigativa com história para o ensino de matemática na formação inicial de professores, a partir da elaboração de um sequencial histórico sobre o conceito de variável. Consideramos esse conceito como mediador³ do ensino de Cálculo.

Dada a natureza variada desse conceito e a incompreensão do papel que a variável desempenha em determinados contextos, surgem diversas lacunas no aprendizado dos estudantes, especialmente quanto ao uso da variável na relação funcional. Nesse contexto, segundo Caraça (1998, p. 120), “a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto” o que pode provocar um “nó” epistemológico em relação ao seu significado. Isso faz com que muitos estudantes a vejam como uma incógnita, uma constante ou apenas um símbolo sem qualquer significado além de sua nomenclatura.

Essa noção de variável (ser e não ser ao mesmo tempo) viabilizou a construção de um dos conceitos mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral: a função. De acordo

¹ Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Professora da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), Barra do Bugres, Mato Grosso, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2129-9606>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1584398452917385>. E-mail: lucianabm@unemat.br.

² Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7910-1602>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4490674057492872>. E-mail: iamendes1@gmail.com.

³ Refere-se a tese de doutorado.

com Schubring (2005), historicamente mais atenção é dada ao desenvolvimento conceitual de função e menos atenção é voltada à variável e ao papel que ela desempenha nesse processo: a variação (algo que flui, movimento).

Embora o termo “variável” não seja explicitamente mencionado, a História da Matemática mostra como esse conceito foi desenvolvido ao lado do conceito de função, entendida como “quantidades que variam”. A ideia de “infinitesimal” desempenhou um papel crucial nesse processo, embora essa teoria tenha sido formalizada posteriormente por meio do conceito de “limite”, que é a base da derivada e da integral, como são ensinadas nos cursos de Cálculo atualmente.

Assim, ao incorporar práticas investigativas com a História da Matemática, o professor permite que o aluno experimente o papel de investigador, buscando a construção do conhecimento matemático (Fossa, 2008; Mendes, 2022). Isso contribui para o desenvolvimento de habilidades como comunicação oral de ideias, autonomia, criatividade, escrita matemática, representação visual, entre outras (Mendes, 2009, 2010).

Diante dos elementos discutidos e reconhecendo a importância de abordar adequadamente o conceito de variável como um campo de conhecimento fundamental para a compreensão do Cálculo, surge a questão central do presente trabalho: quais problematizações históricas podem ser utilizadas para explorar a noção de “variável em movimento”⁴ no ensino de Cálculo durante a formação inicial de professores de matemática?

Este trabalho configura-se como abordagem qualitativa, de procedimento bibliográfico. Conforme Gil (2002), em muitos casos, a única forma de conhecer os eventos passados é por meio de dados bibliográficos, como no caso deste estudo, que se baseia em literatura existente. Assim, escolhemos uma abordagem histórica para oferecer uma visão inicial do conceito de variável ao longo de seu desenvolvimento histórico.

O encaminhamento didático no desenvolvimento das atividades foi uma das maneiras de adotar a investigação histórica para a elaboração de um sequencial histórico a

⁴ Leva ao estudo de questões relacionadas ao infinito, ao infinitesimal e à variação, criando um contexto que favorece a investigação das ideias matemáticas que culminaram no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

ser utilizado no ensino de matemática, apoiado em pesquisas e reflexões teóricas de Mendes (2009, 2010, 2022), o qual propõe diretrizes para os usos da História da Matemática em sala de aula.

Quanto a implementação das problematizações na formação inicial de professores de matemática, ela se fundamenta metodologicamente em dois aspectos da Teoria da Objetivação⁵: 1 - a estrutura da atividade na forma objeto-objetivo-tarefa; 2 - o labor conjunto, ou seja, trabalho em duplas ou trios, o professor apresenta a tarefa para a turma, colaboração humana, ética comunitária (cuidado com o outro), discussões entre os grupos e discussões mais gerais (RADFORD, 2021).

PROBLEMATIZAÇÃO HISTÓRICAS

Apresentamos quatro problematizações históricas que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo, como o paradoxo de Zenão (Aquiles e a tartaruga), a “crise dos incomensuráveis”, o método da exaustão de Eudoxo e o método da tangente de Fermat. Essas problematizações levam ao estudo de questões relacionadas ao infinito, ao infinitesimal e ao movimento (variável em movimento).

O paradoxo de Zenão (Aquiles e a tartaruga) oferece a oportunidade de estudar como uma quantidade se aproxima infinitamente de outra. Tem como objeto de estudo pensar intuitivamente e algebricamente sobre a ideia de movimento. Esta problemática foi utilizada tendo como objetivo geral investigar a relação matemática entre as variáveis (tempo, espaço e velocidade). Como objetivos específicos: examinar a ideia de movimento contínuo; analisar processos infinitos; explorar a noção de convergência; abordar a ideia de limite de função de forma intuitiva.

Trabalhar com a “crise dos incomensuráveis” oferece a oportunidade de estudar um conceito mais amplo de número, no caso, os números irracionais, além da continuidade de números reais na reta numérica. Tem como objeto de estudo pensar algebricamente e

⁵ Teoria sociocultural contemporânea da Educação Matemática que considera o ensino e a aprendizagem nas dimensões: social, cultural, histórica e política.

geometricamente sobre medidas irracionais. Esta problemática foi utilizada tendo como objetivo geral investigar a irracionalidade das medidas. Como objetivos específicos: examinar a ideia de movimento contínuo; analisar processos infinitos; explorar a noção de convergência e a continuidade da reta; abordar a ideia de limite de uma sequência de forma intuitiva.

O método da exaustão de Eudoxo oferece a oportunidade de estudar como uma “quantidade complexa” se aproxima gradual e infinitamente de uma outra quantidade por meio de uma sequência de “quantidades simples”. Tem como objeto estudo pensar intuitivamente e algebricamente sobre reduções contínuas e infinitas. Esta problemática foi utilizada tendo como objetivo geral investigar a relação matemática entre grandezas (variáveis) de mesma natureza. Como objetivos específicos: examinar a ideia de movimento contínuo; analisar processos infinitos; abordar a ideia de limite de forma intuitiva; realizar o cálculo aproximado de áreas de figuras planas.

Já o método da tangente de Fermat oferece a oportunidade de estudar a ideia de taxa de variação de uma quantidade específica em relação à variação de uma outra quantidade usando uma reta tangente. Tem como objeto de estudo pensar intuitivamente sobre a derivada como a inclinação da reta tangente a uma curva. Esta problemática foi utilizada tendo como objetivo geral investigar a determinação da tangente a uma curva. Como objetivos específicos: examinar a ideia de movimento contínuo; investigar a ideia de infinitesimal; determinar a inclinação da reta tangente a uma curva parabólica; abordar a ideia de limite de forma intuitiva.

Entendemos que, para compreender a derivação, é determinante compreender a forma como a função se altera em relação à variável independente. Já para compreender a integração, é necessário entender que se está somando infinitesimais mudanças da função em relação à variável independente e, nesse movimento, o “limite” é um número que indica uma medida instantânea no processo de derivação e uma medida geométrica no processo de integração. Em resumo, o conceito de variável é dinâmico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos apresentar neste estudo a compreensão de que o conceito de variável é uma base essencial e necessária para a correta compreensão das noções e conceitos matemáticos relacionados aos estudos das funções e, conseqüente, do Cálculo Diferencial Integral. Na maioria das funções abordadas no Cálculo, a variável descreverá uma taxa de mudança entre as quantidades relacionadas. Assim, a variação de uma quantidade implica na variação da outra quantidade, o que sugere um movimento ou transformação.

Em um passado histórico, é possível mencionar situações que problematizaram sobre as ideias matemáticas que levaram, posteriormente, ao que conhecemos como conceito de variável. Essas ideias, provenientes da História da Matemática, podem oferecer subsídios para que o professor compreenda o desenvolvimento histórico desse conceito e suas representações ao longo da história do Cálculo.

Situações como o paradoxo de Zenão (Aquiles e a tartaruga), a “crise dos incomensuráveis”, o método da exaustão de Eudoxo e o método da tangente de Fermat suscitaram questões matemáticas intrigantes: discreto e contínuo, finito e infinito, repouso e movimento e infinitesimal. Essas questões motivaram o estudo da variabilidade, tanto em termos de variação instantânea quanto de variação geométrica, os quais dão origem aos processos de derivação e integração, respectivamente, formalizados em termos de “limite” no final do século XIX.

REFERÊNCIAS

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

FOSSA, J. A. Matemática, História e Compreensão. **Revista Cocar**, Pará, v. 3, n. 4, p. 7-16, jul/dez, 2008. Disponível em:
<<https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/77/80>>. Acesso em: 08 abril 2022.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação histórica no ensino da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.



MENDES, Iran Abreu. A Investigação Histórica na Formação de Professores de Matemática. **Revista Cocar**, Belém, v. 4, n. 7, p. 37-48. Jan/jun 2010. ISSN: 2237-0315.

Disponível em:

<<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/160867/37-122-1-PB.pdf>>.

Acesso em: 03 mar 2022.

MENDES, I. A. **Usos da história no ensino de matemática: reflexões teóricas e experiências**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2022.

RADFORD, L. **Teoria da objetivação**: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer a vir a ser no ensino aprendizagem de matemática. Tradução: Bernadete B. Morey e Shirley T. Gobara. São Paulo: Editora e Livraria da Física, 2021.

SCHUBRING, G. **Conflicts between generalization, rigor, and intuition**: number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany. New York: Springer, 2005.

Palavras-chave: Variável; Cálculo; História para o ensino da matemática; Formação de professores.