



O fascículo de Limites e Derivadas produzido a partir do ENCONAM (1991): Um olhar a partir dos Três Mundos da Matemática.

Rafael Gontijo Ferreira¹

Rudá Dantas Ruoso Brandão²

Marcela Richele Ferreira³

Davidson Paulo Azevedo Oliveira⁴

INTRODUÇÃO

Este projeto é parte de uma pesquisa mais abrangente, iniciada em 2022, com o propósito de examinar a história do ensino de Matemática no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET/MG) em Belo Horizonte, desde sua fundação em 1911 até os dias atuais. A pesquisa atual é uma extensão de um Projeto de Iniciação Científica Júnior, focalizando o ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Profissional Técnica de Nível Médio (EPTNM) da instituição, principalmente através de um material didático sobre limites e derivadas elaborado a partir dos Encontros Nacionais de

¹ Estudante do Ensino Médio Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG), Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-2401-6372>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1672609655510476>. E-mail: rafael.gontijof2006@gmail.com

² Estudante do Ensino Médio Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG), Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3650-3094> Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5916960038149218>. E-mail: rudabrandao@ruoso.com

³ Doutora em Modelagem Matemática e Computacional pelo Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG). Professora no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG), Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0920-6542> Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2354098257543861>. E-mail: marcela.richele@gmail.com.

⁴ Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual de São Paulo (UNESP Rio Claro). Professor no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG), Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2794-8515>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1048347237300518>. E-mail: davidson@cefetmg.br.

Professores de Matemática das Escolas Técnicas Federais (ENCONAM), ocorridos entre 1980 e 1996.

Estes encontros reuniram professores que ensinavam matemática em busca de discutir o ensino, integrando a Matemática com as áreas técnicas das instituições. Nesse contexto, o grupo produziu e publicou dez fascículos, abordando conteúdos de Matemática do ensino médio com aplicações nas disciplinas técnicas oferecidas pelas instituições, sendo que o fascículo Limites e Derivadas foi redigido por um professor já aposentado do CEFET-MG, João Bosco". Maciel e Sá (2020) analisaram esses fascículos e concluíram que, apesar dos esforços para conectar teoria e prática, ainda persistem fragilidades na abordagem interdisciplinar dos materiais. O estudo indica que os fascículos não exploravam de forma abrangente as áreas técnicas correlatas, revelando um desafio constante para os professores da Educação Profissional.

A discussão sobre o ensino de Limites e Derivadas não é nova e é extensamente discutida na literatura. Segundo Tobies (2019), o matemático alemão Felix Klein advoga por uma abordagem matemática centrada no estudo das funções, considerando o Cálculo como uma etapa final do desenvolvimento curricular do ensino secundário. Nesse mesmo sentido, Tall (1992) defende que, além de o conceito de função ser central na matemática contemporânea, ele leva o estudante a um conceito mais avançado, o de limite, sugerindo que tais ideias deveriam ser introduzidas de forma não formal no ensino secundário.

O pesquisador formula uma teoria que ele chama de "Três Mundos da Matemática": o corpóreo, o simbólico e o axiomático formal. Assim, a pesquisa procura responder à seguinte questão de investigação: a partir dos Três Mundos da Matemática, quais são as abordagens metodológicas para o conceito de limites e derivadas apresentadas no fascículo da ENCONAM de 1991 dedicado a esse tema?

É importante salientar que a teoria dos Três Mundos da Matemática (Tall, 1995, 2013) emergiu em nosso trabalho a partir da leitura dos trabalhos de Silva (2023, 2023a). A autora utiliza materiais dedicados ao Ensino Médio entre as décadas de 1940 e 1970 para analisar o ensino de limites (Silva, 2023) e derivadas (Silva, 2023a) a partir dessa teoria. No contexto de nossa pesquisa, o material analisado é de produção de professores da instituição

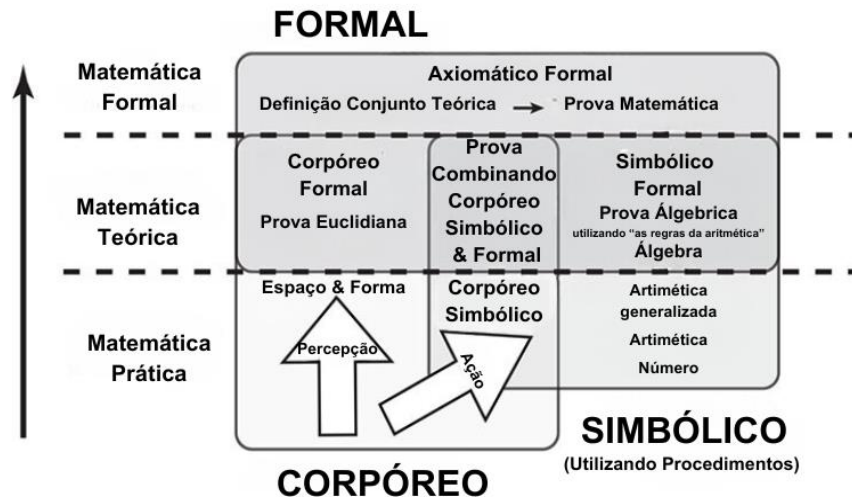
(CEFET MG) o que torna relevante uma comparação com a discussão apresentada pela pesquisadora.

O objetivo central desta pesquisa, portanto, é analisar a forma como o conteúdo do livro é apresentado, buscando compreender como os conceitos de limites e derivadas são abordados e qual sua aplicabilidade na comunidade técnica para a qual foi elaborado. Para alcançar esse propósito, serão utilizadas ferramentas teóricas propostas por David Tall (2013), como a Teoria dos Três Mundos da Matemática e as teorias do Pensamento Matemático Elementar e Avançado. Esta abordagem visa proporcionar *insights* sobre o material didático e sua contribuição para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes nesse contexto específico.

OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

A Teoria dos Três Mundos da Matemática desenvolvida por Tall (2013) visa explorar uma classificação das distintas formas pelas quais podemos exercer e conceber o pensamento matemático, delineando assim três mundos distintos no âmbito do pensamento matemático, o que ele denomina de mundo corpóreo, de mundo axiomático e de mundo simbólico (fig. 1).

Figura 1 - Representação visual das transformações entre os três mundos matemáticos.



Fonte: Tall (2013, p. 19, tradução própria)

Segundo Tall (2013), no mundo corpóreo, encontram-se representações mentais e físicas perceptíveis a nós, relacionadas aos conceitos matemáticos, abrangendo a ideia de espaço e forma. Por sua vez, o mundo simbólico engloba símbolos, sejam estes referentes à aritmética, ao cálculo ou à álgebra, e introduz também a noção de números. Já o mundo axiomático, também denominado de mundo formal, consiste em teorias, fórmulas e provas matemáticas, invertendo a sequência tradicional da construção do conhecimento, partindo de definições com base em objetos conhecidos para alcançar conceitos formais fundamentados em definições. É relevante observar que esses mundos não existem de maneira isolada; ao contrário, compartilham interseções entre si, indicando uma interconexão complexa no panorama do pensamento matemático.

De modo a aprofundar nossa compreensão da teoria dos Três Mundos na Matemática, nos ateremos nos trabalhos de Tall (1995, 2013) que apresenta duas categorias essenciais: o Pensamento Matemático Elementar (PME) e o Pensamento Matemático Avançado (PMA). Embora não exista uma concepção unívoca desses conceitos (Torrente; Reis, 2023).

De acordo com o autor, o PME se mostra uma categoria fundamental no estudo da abordagem da matemática. Nesse modo de pensar, a generalização se apresenta como ferramenta essencial para conceber novas ideias. Isso se dá devido ao desenvolvimento de

conceitos iniciais de forma a se construir uma base robusta para se permitir uma eventual assimilação e aplicação de conhecimentos matemáticos mais avançados.

Por outro lado, o pesquisador propõe que o PMA não precisa seguir essa mesma lógica para a criação de ideias matemáticas. Isso é explicado pela forma como o aluno passa a relacionar ideias inicialmente desconexas. Desse modo, Tall demonstra que é nessa etapa que se desenvolve um pensamento abstrato, enquanto, no PME, o raciocínio é baseado na generalização. Devido a importância dessas teorias para se discutir o desenvolvimento dos estudantes de matemática, elas serão usadas para analisar as mobilizações entre os diferentes mundos apresentados por Tall.

A FONTE PRINCIPAL

Nossa hipótese inicial, baseada em uma primeira análise do material, sugere que o livro "Limites e Derivadas para Escolas Técnicas Industriais e Centros de Educação Tecnológica", publicado em 1991 representa uma atualização de materiais anteriores sobre ensino de Cálculo, elaborados e utilizados por professores do e no CEFET MG nas décadas de 1970 e 1980. Um desses materiais é analisado por Oliveira, Pagani e Teixeira (2023), que destacam que a apostila de 1973 apresenta uma introdução ao estudo de limites de modo intuitivo, mas com algumas lacunas para os estudantes.

O material em análise foi redigido por Silvimar Fábio Ferreira, João Bosco Laudares, Luiz de Gonzaga Vieira, Pedro Cesar Rocha Coimbra e Valdemar Pereira Lopes. Este é o décimo fascículo de uma coleção de onze textos produzidos a partir do ENCONAM, que buscam abordar os diferentes conteúdos estudados pelos alunos das Escolas Técnicas, compondo o programa oficial de Matemática do 2º grau ministrado nas escolas da instituição. Importante notar que o livro foi produzido por uma Comissão Central Permanente (CCP), composta por professores dos CEFETs de Minas Gerais, Paraná e das Escolas Técnicas Federais (ETFs) do Ceará, Mato Grosso e Goiás. Contudo, a iniciativa não é nova, representando uma reformulação de trabalhos anteriores baseados em fascículos e textos de diversas escolas técnicas e centros federais de educação tecnológica.

Os autores do material no prefácio da obra informam que o livro adota uma metodologia direcionada e específica ao ensino profissionalizante, com o objetivo principal

de estimular o raciocínio dos estudantes e reduzir a ênfase na memorização, promovendo um aprofundamento do conhecimento muitas vezes considerado superficial. Além disso, em uma análise inicial percebemos que a obra se destaca pelo foco na interpretação gráfica das funções, ou seja, uma ênfase no Mundo Corporeo, como proposto por Tall (1995, 2013). Além disso, há no material a demonstração do limite trigonométrico fundamental que, a partir de uma análise baseada na teoria dos Três Mundos, apresenta uma abordagem mais axiomática. Ademais, uma análise preliminar do livro revela uma maior incidência de problemas de aplicação dos conceitos matemáticos relacionados tanto à física quanto às disciplinas técnicas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao adotarmos perspectivas embasadas na Teoria dos Três Mundos da Matemática e do Pensamento Matemático Elementar e Avançado de David Tall (2013), buscamos compreender não apenas como os conceitos de limites e derivadas são apresentados no livro, mas também sua aplicabilidade na formação técnica dos alunos.

Por fim, pretendemos que este estudo apresenta reflexões mais amplas sobre o ensino de Matemática em contextos técnicos e profissionalizantes, destacando a importância de abordagens pedagógicas que valorizem a contextualização, a aplicabilidade e o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos.

Visto isto, destaca-se que o objetivo principal é que esta investigação contribua para a compreensão da aprendizagem de Limites e derivadas e da Matemática em escolas técnicas e centros de educação tecnológica, além de ampliar a percepção sobre o ensino de Cálculo no Ensino Médio Técnico da instituição.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da FAPEMIG e bolsa do Programa de Iniciação Científica Júnior do CEFET MG.



REFERÊNCIAS

MACIEL, A. R. B., & SÁ, L. C. Uma análise de materiais didáticos produzidos por professores de Matemática da Educação Profissional entre 1980 e 1996. **TANGRAM - Revista De Educação Matemática**, v. 3. n. 4, p. 114–133. 2020. Disponível em: <https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12635>. Acesso em: 22 ago. 2023.

OLIVEIRA, D. P. A.; PAGANI, E. M. L.; TEIXEIRA, A. C.. O ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas Prescrições Curriculares para o Ensino Médio Técnico no CEFET MG. In: XVI CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA, 2023, Lima. **Actas...** Lima, Peru. 2023. p. 86-93.

SILVA, C. M. S. da. Limites: uma breve passagem nos livros brasileiros do Ensino Secundário. **ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, [S. l.], v. 5, p. 1–25, 2023. DOI: 10.55928/ACERVO.2675-2646.2023.5.87. Disponível em: <https://ojs.ghemat-brasil.com.br/index.php/ACERVO/article/view/87>. Acesso em: 10 nov. 2023.

SILVA, C. M. S. da. A função derivada em livros didáticos para o Ensino Secundário. **ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, [S. l.], v. 5, p. 1–19, 2023a. DOI: 10.55928/ACERVO.2675-2646.2023.5.126. Disponível em: <https://ojs.ghemat-brasil.com.br/index.php/ACERVO/article/view/126>. Acesso em: 10 nov. 2023.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D.O. (Ed). **Advanced Mathematical Thinking**, pp. 3-20. New York: Cambridge University Press, 1995.

TALL, D. O. **How humans learn to think mathematically** : exploring the three worlds of mathematics. New York: Cambridge University Press, 2013.

TOBIES, R. **Felix Klein**: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht. Berlin: Springer Spektrum– Verlag. 2019.



TORRENTE, C. R., REIS, F. da S. **A mobilização de processos do Pensamento Matemático Avançado na resolução de questões da OBMEP.** *Revista Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática*, 13(2), 1-22. 2023.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial; ENCONAM; Educação Profissional.