XXIII Seminário Temático Internacional
HISTÓRIAS TRANSNACIONAIS DA EDUCAÇÃO: produção, circulação e reapropriações de saberes
Santos – São Paulo, 23 a 25 de abril de 2025
GHEMAT-Brasil

ISSN: 2357-9889

O CÁLCULO DIFERENCIAL PELO LIVRO *CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL* DE PISKUNOV: um estudo histórico

Autor 1[1]

Autor 2[2]

Este trabalho de Iniciação Científica[3] em desenvolvimento tem como objetivo fazer uma análise histórica sobre o cálculo diferencial presente no livro *Cálculo Diferencial e Integral* de Piskunov. Sua questão norteadora é: que cálculo diferencial foi proposto no livro *Cálculo Diferencial e Integral* de Piskunov? O presente trabalho está vinculado ao projeto de pesquisa denominado *XXXXXXXXXXX*[4], que visa “[...] analisar debates que intentaram incluir o Cálculo Diferencial e Integral como conteúdo escolar a partir da Reforma Benjamin Constant[5]até os dias atuais.” (Autor 2 *et al*., 2021, p.1)

Esta pesquisa se mostra relevante, pois o livro de Piskunov, entre as décadas de 1960 e 1990, foi tomado como referência em vários cursos superiores envolvendo ciências exatas no Brasil.

Dentre eles, o livro foi bastante difundido na Universidade Federal da Bahia (UFBA) (UFBA, 1980) e na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) (1980-1990). Esta última, no período de 1978 a 1986, ofertava o curso de Licenciatura Plena em Ciência com Habilitação em Matemática, voltada para a formação dos professores de matemática que iriam lecionar no segundo grau (Ensino Médio). Nesse curso, foi implementado o ensino de cálculo diferencial, sob a disciplina de Cálculo I, que no ano de 1986, conforme Oliveira (2022), foi ministrada tendo o estudo de limite como o seu conceito.

Nela, o livro de Piskunov foi utilizado como bibliografia básica da disciplina de Cálculo I, ministrada semelhantemente ao que Piskunov propôs em seu livro. Isto é,

[1] Autor 1.
[2] Autor 2.
[3] Aprovado pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq) da Universidade Estadual de Feira de Santana, sob orientação XXXXXXX.
[4] Fomentado pelo CNPq, mediante aprovação no Edital da Chamada CNPq/MCTI/FNDCT Nº 18/2021 – Universal - faixa A, 2021.
[5] Essa Reforma foi implementada por meio do Decreto n.º 981, de 8 de novembro de 1890, que regulamentou a instrução primária e secundária do Distrito Federal (Brasil, 1890). Na atualidade, tais níveis de ensino podem ser equiparados aos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

ISSN: 2357-9889

começando pelo conteúdo de limite – teoria central desde o século XIX – e, em sequência, com a apresentação de derivada (Oliveira, 2022).

Assim, neste texto, utilizamos como objeto de estudo e fonte histórica (Choppin, 2004), a 9ª edição do livro traduzida para o português. Isso porque, em um levantamento bibliográfico feito pelo Colegiado de Matemática da UEFS, no ano de 1991, há informações acerca da bibliografia básica e complementar das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática. Nessa época, o acervo da biblioteca já contava com 16 volumes da edição de 1982 de Piskunov (UEFS, 1991). Assim, tudo indica que esta foi a edição utilizada na disciplina de Cálculo I em 1986. Conjectura-se que a escolha do livro de Piskunov, como literatura básica dessa disciplina, pode estar relacionada com o fato de que as ideias de Piskunov dialogavam com as inovações e desafios da época, sendo ele considerado um autor rigoroso no manejo da matemática moderna. Algo que convergia com a realidade brasileira, que desde a implementação dos primeiros cursos superiores independentes de matemática para formar os professores que atuariam nas escolas secundárias na década de 1930 (Dias, 2002), buscava-se, de maneira geral, modernizar o ensino da matemática tendo como o seu centro as abordagens algébricas e analíticas[6].

O LIVRO DE CÁLCULO DE PISKUNOV

Nikolai Semenovich Piskunov (1908-1977) foi um matemático soviético, nascido em Froltsovo, atual Ivanovo. Formou-se no Instituto Pedagógico Yaroslavl em 1929. Doutor em Ciência Física e Matemática, atuava como professor desde 1939. A partir de 1941, trabalhou no Instituto de Matemática da Academia de Ciência da antiga União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS).

Além disso, Piskunov era autor de livros didáticos, produzindo ao todo 14 obras. Vários deles foram direcionados para estudantes universitários, dentre eles, o livro intitulado *Cálculo Diferencial e Integral*, publicado em 1961[7]. Inicialmente, conforme o próprio autor salientou no prefácio da quarta edição russa, (Piskunov, 1985), a partir daquela

[6] Maiores informações, ver: (ROQUE, 2012).
[7] A publicação mais antiga que encontramos até o momento.

ISSN: 2357-9889

edição, o livro, que tinha um formato compacto, passou a ser publicado em dois volumes. Nosso foco é o primeiro volume.

No prefácio da nona edição em português desse livro, Piskunov (1982) relata que certos capítulos foram revistos e acrescidos de informações, em especial, os capítulos que abordavam ramos ligados à matemática moderna por considerar conhecimento fundamental para seu público-alvo. Segundo esse autor:

> Certos capítulos foram profundamente revistos e completados, em especial aqueles que tratam de certos ramos da matemática moderna, cujo conhecimento e nos nossos dias indispensável [sic] a todo o engenheiro. [...] Certas questões, habitualmente tratadas nestes capítulos, foram conscientemente reportadas aos capítulos seguintes. Isto permitiu abordar rapidamente a derivada, noção fundamental do cálculo diferencial; esta necessidade foi-nos ditada pelas exigências das outras disciplinas do ensino técnico superior. (Piskunov, 1982, p.11).

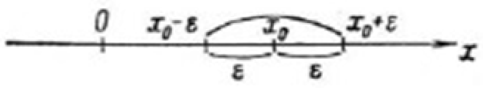
Pelo excerto, percebe-se que as mudanças feitas por Piskunov foram para atender ao seu público-alvo, qual seja, os alunos do curso de engenharia. No entanto, o livro também foi amplamente utilizado em várias localidades e em diversos cursos de graduação, inclusive nas licenciaturas em matemática. Esse aparente sucesso é refletido na tradução desse livro em diferentes idiomas, como o francês, espanhol, inglês e a já mencionada língua portuguesa. Quanto à sua estrutura, o livro de Piskunov é dividido em doze capítulos, no qual nos concentramos no primeiro – *Número, variável, funções* – e segundo capítulo – *Limite e continuidade das funções*.

Nesta obra, é notória a grande variedade de exemplos aplicados e utilização de demonstrações geométricas. Entretanto, segundo Ávila (2002), Piskunov não deixava de lado o rigor matemático. Para Ávila (2002, p.84), tal prática é evidenciada na "[...] introdução, logo no início do curso, da definição de limite em termos de $\mathcal{E}$ e δ, e consequente dedução das propriedades do limite".

Isso pode ser examinado, por exemplo, no tópico *Domínio de definição duma variável,* onde Piskunov determina que o domínio de uma variável é o "*conjunto dos valores numéricos que ela é susceptível de tomar*" (Piskunov, 1982, p. 17-18). Ainda, ressaltou que se *x* pertence ao intervalo $(x_0 - \mathcal{E}, x_0 + \mathcal{E})$, então x é o centro do intervalo de raio $\mathcal{E}$, que em outras palavras significa que $|x - x_0| < \mathcal{E}$.

ISSN: 2357-9889

Figura 1 – Vizinhança



Fonte: Piskunov (1982)

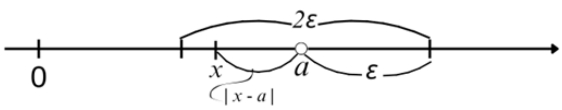
Em seu segundo capítulo *Limite e continuidade das funções,* Piskunov traz a seguinte definição de limite de uma função:

> Seja $y = f(x)$ uma função definida numa vizinhança do ponto a ou em certos pontos desta vizinhança. A *função y = f (x) tende para o limite b (y → b) quando x tende para a (x →a)*, se para cada número positivo ε, por mais pequeno que seja, se pode indicar um número positivo δ tal que para todos, os x diferentes de a e verificando a desigualdade
> $$| x - a | < \delta$$
> a desigualdade
> $$| f(x) - b | < \varepsilon$$
> é satisfeita. Se b é o *limite da função f (x)* quando x→ a, escreve-se então
> $$f(x) = b$$
> ou $f(x) \to b$ quando $x \to a$ (Piskunov, 1982, p. 37).

É fundamental ressaltar que a definição proposta por Piskunov, mesmo nos dias atuais, é considerada moderna devido ao seu rigor, centrado nas abordagens algébricas e analíticas. Ainda nesse segundo capítulo, temos a definição de limite de uma variável que antecede o limite de uma função. Nela, Piskunov (1982, p. 34) afirma:

> O número constante a chama-se o limite da grandeza variável x. Se, para todo o número arbitrariamente pequeno $\varepsilon > 0$, se pode indicar um valor da variável x tal que todos os valores consequentes da variável verifiquem a desigualdade
> $$|x-a| < \varepsilon.$$
> Se o número a é o *limite* da variável x, diz-se que x tende para o limite a e escreve-se:
> $$x \to a \text{ ou } \lim x = a$$

Figura 2 – Representação de Piskunov



Fonte: Piskunov (1982, p. 84)

Para Piskunov (1982, p.34), utilizar "O número constante *a*" e "grandeza variável", foi necessário que ele definisse esses termos no capítulo anterior. No tópico, *Grandezas*

ISSN: 2357-9889

variáveis e grandezas constantes é explicado, por meio de exemplos de grandezas físicas, o conceito de *variação* (suscetível a tornar diferentes valores) e *constância* (quando os valores numéricos não mudam). Em seus estudos Reis (2003) enfatiza que o ensino de cálculo passou a ser fundamentado na teoria do limite a partir do século XIX por meio de Cauchy, que apresentou essa teorização fazendo uso da ideia de *variação* e *constância.*

> Chamamos quantidade *variável* aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade *constante* aquela que assume um valor fixo e determinado[8] (Cauchy, 1823, p.1).

Podemos notar que existe certa semelhança na definição de limite de uma variável apresentada por Piskunov e a definição de limite apresentada por Cauchy, na qual ele descrevia:

> Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado o limite de todos os outros. [...] Indicaremos o limite para o qual converge determinada variável pela abreviação "lim." escrita antes da variável em questão[9](Cauchy, 1823, p.1).

A formalização do cálculo, com a última palavra do rigor, vem a partir de Weierstrass, em sua contribuição de função contínua e magnitude de uma variável, onde ele afirma:

> Chamamos de magnitude variável, ilimitada ou limitada, aquela que pode aceitar valores infinitamente pequenos, ou que é capaz de tais valores, se, entre os valores que pode aceitar, as quantidades forem menores do que qualquer quantidade arbitrariamente pequena assumida. Um tamanho variável *x* se torna infinitamente pequeno, com outro *y*, ao mesmo tempo, significa: 'Depois de assumir uma grandeza arbitrariamente pequena ε, pode ser determinado para x um limite de δ, de modo que para cada valor de *x*, para o qual $|x|<\delta$, o valor correspondente torna-se $|y| < \varepsilon$' (Weierstrass, 1878, p. 57 apud Silva, 2021, p.296).

[8] On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusicurs valeurs différentes les ume des autres. On appelle au contraire quantité *constante* toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée.
[9] Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéhniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudre, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. [...]. Nous indiquerons la limite vers laquelle converge une variable donnée par l'abréviation "*lim.*" placée devant cette Variable.

ISSN: 2357-9889

Então, Piskunov (1982), para que a sua definição de limite de uma variável estivesse em conformidade com a definição moderna, descreve as expressões "$\varepsilon>0$" (vizinhança), "$|x-a| < \varepsilon$." (módulo e variável limitada), "consequentes da variável" (variável ordenada), nas quais foram esclarecidas, respectivamente, no primeiro capítulo nos tópicos Domínio de definição duma variável; Valor absoluto de um número Real e Variável ordenada; Variável crescente e Variável decrescente; Variável limitada. Com isso, Piskunov (1982) consegue definir o limite de uma variável preservando a unicidade e as propriedades do limite. Faltou, no entanto, esclarecer de que forma as variáveis percorriam seu domínio.

Para abordar este ponto, Piskunov (1982) inicia no primeiro capítulo a introdução de noções sobre função. Assim, declarou que "y é uma Função de x e escreveremos $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, etc., se a cada valor da variável x pertencendo a um certo domínio, corresponde um valor da variável y" (Piskunov, 1982, p. 20).

Nesse primeiro movimento, pareceu-nos que esse autor trabalhou com uma definição de função, tendo certas semelhanças com versões que circularam em tempos anteriores por matemáticos. É possível perceber, neste caso, certa aproximação da definição proposta por Piskunov com a proposta por Dirichlet (1837):

> Se a variável y está tão relacionada a variável x de tal forma que sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra segundo a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independe x" (*apud* Autor 2, 2006, p.88, tradução nossa).

Contudo, apesar das semelhanças, como o uso da noção de variabilidade na formulação do conceito de função dada por Dirichlet, é importante observar que essas definições são contextualizadas em épocas distintas. Enquanto o conceito de domínio, por exemplo, não estava de forma plena estabelecido na época de Dirichlet, já era amplamente reconhecido e compreendido quando Piskunov apresentou sua definição. Isso possibilitou que Piskunov incorporasse esse conceito na formulação de sua definição de função, tornando-a mais próxima das definições de funções aceitas atualmente.

Dada a definição de função, Piskunov (1982) parte para a introdução do conceito de limite de uma função. Entretanto, para que essa definição pudesse ser considerada moderna, conforme mencionado anteriormente, foi necessária a utilização de noção de função contínua que, segundo Ávila (2002), só foi apresentada por Weierstrass em 1874.

ISSN: 2357-9889

De fato, Weierstrass (USP, c2001b), determina que, se f é uma função contínua em um intervalo *(a, b)*, então para todo $x \in (a, b)$, existe um $x' \leq x$, e existe $x'' \geq x$, isto significa que por menor que seja o intervalo, vai existir um x pertencente ao intervalo, de modo que x' se aproxime de x pela esquerda $(x' \leq x)$, e que se aproxime de x'' pela direita $(x'' \geq x)$, ou seja, para qualquer intervalo, existe uma variação $| x - a | <$, notação, também, adotada por Piskunov em limite de uma função. Logo, percebe-se que Piskunov consegue definir limite de uma função de maneira moderna.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O livro *Cálculo Diferencial e Integral* de Piskunov por mais que seja voltado para estudantes de engenharia, destacou-se também em cursos de Licenciatura em Matemática, tal como na Licenciatura Plena em Ciências da UEFS, pelo menos no ano de 1986.

Esse aspecto, ainda que precisa ser mais bem investigado, traz indícios de que o olhar dos cursos de licenciatura, nesse período, era mais voltado para o próprio campo disciplinar da matemática, do que para a prática docente.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por meio de bolsa de iniciação científica aprovada em Edital XXXXXXXX.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, n. 33, p. 83-95, dez. 2002.

CAUCHY, A. L. **Resume des leçons données a l'Feale Polytechnique sur le calcul infinitésimal**. *In*: Oeures. (II), IV. Disponível em: https://archive.org/details/TO0E033362_TO0324_PNI-2035_000000/mode/2up. Acesso em: 05 ago. 2024.

ISSN: 2357-9889

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a12v30n3.pdf. Acesso em: 20 out. 2024.

DIAS, André Luis Mattedi. Um estudo da trajetória da historiografia. **Revista Brasileira de História da Matemática,** Rio Claro, v. 2, n. 4, p.169-195, 2002.

AUTOR 2, 2006.

AUTOR 2, 2021.

OLIVEIRA, M. B. O ensino de cálculo diferencial no curso de Licenciatura Plena em Ciências da Universidade Estadual de Feira de Santana: uma análise do caderno de cálculo de uma licencianda (1986). **Acervo** - Boletim do Centro de documentação do GHEMAT-SP, São Paulo, v. 4, p. 1-25, 2022. https://doi.org/10.55928/ACERVO.2675-2646.2022.4.71.

PISKUNOV, N**. Cálculo Diferencial e Integral**. 9. ed. Porto: Lopes da Silva,1982.

PISKUNOV, N**. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов** [Diferenciál e integral para estudantes de escolas técnicas superiores]. Tomo 1. 13. ed. Moscou: Nauka, 1985.

REIS, F. S. **A tensão entre Rigor e Intuição no ensino de cálculo de Análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2003. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROQUE, T. O século XIX inventa a matemática pura. *In*: ROQUE, Tatiana. **História de Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 2 reimp. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. p. 404-461.

SILVA, C. M. S. As Notas de Aula de Karl Weierstrass em 1878. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 21, n. 42, p. 294-328, 2021. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/364/331. Acesso em: 20 ago. 2024.

UEFS [UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA]. Colegiado do curso de Licenciatura em Matemática. Levantamento bibliográfico. Feira de Santana: UEFS, 1991.

USP [UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO]. **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897)**. c2001b. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/weierstrass.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

Palavras chave: Cálculo-diferencial, livro-didático, história, Piskunov.